



UNIVERSITÀ DI PISA
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA E MANAGEMENT

Corso di Laurea Magistrale in Banca, Finanza Aziendale e
Mercati Finanziari

Tesi di Laurea

La replica del valore delle opzioni in presenza dei costi di
transazione

Relatore
Prof. Emanuele Vannucci

Candidato
Francesco Paolo Salomone

Anno Accademico 2015-2016

INDICE

PREFAZIONE	I
1 GLI STRUMENTI DERIVATI.....	1
1.1 INTRODUZIONE.....	1
1.2 STORIA ED EVOLUZIONE DEGLI STRUMENTI DERIVATI.....	1
1.3 IL MERCATO IDEM	4
1.4 I CONTRATTI DERIVATI.....	9
1.5 SUCCESSO E RISCHI DEI CONTRATTI DERIVATI.....	13
1.6 LE PRINCIPALI TIPOLOGIE DI CONTRATTI DERIVATI.....	14
1.6.1 <i>I Futures</i>	14
1.6.1.1 <i>I Futures</i> sull'indice FTSE MIB	17
1.6.2 <i>I Forwards</i>	17
1.6.3 <i>Gli Swaps</i>	18
1.6.4 <i>Le Options</i>	19
1.6.4.1 Le opzioni sull'indice FTSE MIB.....	22
1.6.4.2 Le opzioni su azioni.....	23
1.6.4.3 Le greche	23
1.6.4.4 Call-Put parity	28
2 MODELLI DI PRICING DELLE OPZIONI.....	31
2.1 IL MODELLO BINOMIALE	31
2.2 INTRODUZIONE AL MODELLO DI BLACK-SCHOLES	34
2.3 MODELLO DI BLACK-SCHOLES-MERTON	37
2.3.1 <i>La volatilità nel modello di Black-Scholes</i>	45
2.3.1.1 Volatilità implicita.....	46
2.3.2 <i>Esplicazione delle formule di Black-Scholes: I fattori Nd1 e Nd2</i>	49
2.3.3 <i>Riflessioni e critiche sul modello di Black-Scholes</i>	50
3 STRATEGIE DI REPLICA ALTERNATIVE	55
3.1 COSTI DI TRANSAZIONE.....	55
3.2 NORMATIVA SUI COSTI DI TRANSAZIONE.....	55
3.3 TIME BASED APPROACH	57
3.3.1 <i>Il modello di Leland</i>	57
3.3.2 <i>Critiche al modello di Leland</i>	66
3.4 UTILITY BASED APPROACH.....	67
3.5 MOVE BASED APPROACH.....	68
3.5.1 <i>Delta Tolerance</i>	69
3.5.2 <i>Fixed Bandwidth Around Delta</i>	69
3.5.3 <i>Variable Bandwidth Delta</i>	70

3.5.4	<i>Asset Tolerance</i>	71
4	OBIETTIVO E SVILUPPO DELLA TESI	73
4.1	CONCLUSIONI.....	98
	BIBLIOGRAFIA	101
	INDICE DELLE FIGURE	105

Prefazione

Gli strumenti derivati sono contratti su uno o più strumenti finanziari sottostanti, il cui valore deriva dalle attività sottostanti stesse, la quali possono essere: azioni, obbligazioni, indici finanziari, materie prime, valute. Esistono differenti tipologie principali di derivati: i contratti a termine, ovvero *forwards* e *futures*, gli *swaps* e le *options*. Tali strumenti vengono utilizzati con finalità di arbitraggio, speculazione e copertura.

A tal proposito, è necessario definire il prezzo di tali strumenti. Ciò ha portato allo sviluppo di diversi modelli di prezzaggio dei derivati, primo fra tutti il modello di Black-Scholes. Basato sulla creazione di un portafoglio che replica esattamente il valore del derivato fino a scadenza, è il modello di prezzaggio maggiormente utilizzato dagli operatori di mercato.

La realtà dei mercati finanziari è, però, ben diversa dall'ipotesi di mercato perfetto sul quale poggia l'intero modello. Ciò ne ha messo in luce i limiti e le imperfezioni, in particolare le assunzioni di assenza di costi di transazione ed il bilanciamento del portafoglio in tempo continuo, portando allo sviluppo di modelli alternativi, quali gli approcci *time based*, *utility based* e *move based*, che muovono dalla volontà di assecondare maggiormente la realtà nella replica del valore delle opzioni.

Nell'ambito di questo elaborato, quindi, analizzeremo innanzitutto le caratteristiche degli strumenti derivati nel capitolo 1; successivamente, nel capitolo 2, approfondiremo i modelli di prezzaggio delle opzioni che sono maggiormente utilizzati dagli operatori di mercato; nel capitolo 3 faremo una rassegna dei modelli alternativi per il prezzaggio delle opzioni e nel capitolo 4 dirigeremo la nostra attenzione sui risultati ottenuti dalla creazione di vari portafogli di replica utilizzando due modelli in particolare, quali l'approccio *Time based* con il modello di Leland e l'approccio *move based* nel caso del modello *Asset Tolerance*, nonché i risultati di un ulteriore portafoglio costruito mettendo assieme le peculiarità di questi due modelli. Faremo, inoltre, riferimento ad una strategia statica di replica delle opzioni, generalmente utilizzata come *benchmark*.

1 Gli strumenti derivati

1.1 Introduzione

Gli strumenti finanziari derivati vengono definiti dall'art. 1, comma 2, lettera D del Decreto legislativo 24 febbraio 1998, n. 58 come: *‘Contratti di opzione, contratti finanziari a termine standardizzati (future), swap, accordi per scambi futuri di tassi di interesse e altri contratti derivati connessi a valori mobiliari, valute, tassi di interesse o rendimenti, o ad altri strumenti derivati, indici finanziari o misure finanziarie che possono essere regolati con consegna fisica del sottostante o attraverso il pagamento di differenziali in contanti’*. Le controparti del contratto si impegnano a comprare o a vendere una determinata attività entro o ad una data scadenza e ad un prezzo prestabilito. Il regolamento può avvenire in contanti, *cash settlement*, come differenza tra il valore a scadenza e il valore a termine stabilito nel contratto, oppure tramite consegna del sottostante da parte del venditore all'acquirente dietro pagamento del prezzo di consegna, *physical delivery*¹.

Sono negoziati nei cosiddetti ‘mercati a termine’ poiché rappresentano una compravendita futura, dove il ‘termine’ è la data alla quale si realizzerà effettivamente lo scambio.

1.2 Storia ed evoluzione degli strumenti derivati

Alcuni strumenti derivati hanno origini antiche: i contratti a termine erano già usati ai tempi degli antichi greci e dei romani. Aristotele narrava che Talete di Mileto, astrologo greco, nel 580 a.C., fosse stato in grado di predire l'andamento del raccolto delle olive consultando gli astri. Grazie a questa conoscenza, egli aveva acquistato dagli agricoltori il diritto di utilizzare il prodotto del raccolto nella stagione successiva. Le sue previsioni si rivelarono corrette ed egli poté quindi esercitare tale diritto, rivendendo poi il raccolto agli agricoltori vicini, ottenendo un profitto.² Si arricchì, quindi, stipulando in inverno,

¹ Ciò non è possibile quando il sottostante non è fisicamente scambiabile come, ad esempio, nel caso di indici finanziari.

² cit. (Borsa Italiana, Guida alle opzioni. Aspetti teorici, 2001)

quando la domanda era bassa, un contratto sull'utilizzo di alcuni frantoi in autunno, momento in cui la domanda era massima. L'origine dei *futures* risale all'età romana. In quel periodo esistevano dei mercati, chiamati *fora vendalia*, specializzati nella vendita di particolari produzioni agricole che giungevano da ogni parte dell'Impero. Nel Medioevo si è assistito alla nascita di moderni mercati *futures*, che si tenevano presso fiere stagionali, in particolare nella regione dello Champagne in Francia. Tali mercati si svilupparono per soddisfare le esigenze degli agricoltori e dei mercanti. Gli accordi generalmente avevano per oggetto un raccolto futuro ed il principale obiettivo era quello di giungere ad un prezzo giusto e consentire alle parti di eliminare il rischio relativo all'incertezza sul prezzo futuro del grano. Nel 1164 a Genova venne stipulato il primo contratto derivato che vedeva la vendita, da parte di un ente locale ad un istituto finanziario, delle entrate fiscali future del Comune in cambio di un anticipo immediato. I primi mercati organizzati per lo scambio di derivati risalgono al XVI e XVII secolo. Nel 1600 ci fu l'ammissione alla negoziazione al Royal Exchange di Londra dei contratti *forwards*.³

Nel 1637 ci fu la prima bolla speculativa della storia dei mercati finanziari: la bolla speculativa sui tulipani. La crisi finanziaria innescata dall'utilizzo degli strumenti derivati con finalità speculative si ripercosse su tutto il sistema economico europeo di quei tempi. Nel 1500 la coltivazione dei tulipani fu importata in Europa dalla Turchia, e diffusa dall'Olanda. I tulipani venivano considerati come merce di lusso, desiderati dalla borghesia e dai ricchi mercanti, ed il prezzo di scambio crebbe rapidamente. Il bulbo di tulipano veniva considerato un investimento perché da quello sarebbero nati altri tulipani in futuro. Era, quindi, utilizzato come un *future* dagli acquirenti come i fioristi, con consegna futura del bulbo. La bolla dei tulipani culminò il 5 febbraio 1637, in cui centinaia di lotti di bulbi furono venduti per un ammontare monetario di 90.000 fiorini, equivalente a circa 5 milioni di euro. Nei giorni immediatamente successivi, l'entusiasmo delle vendite si tramutò in panico: fu sufficiente che un'asta di bulbi andasse deserta per provocare il cosiddetto *panic selling*, ovvero la vendita incontrollata che fece precipitare i prezzi di mercato dei tulipani in tutto il Paese. La domanda diminuì in modo tale da non essere sufficiente a sostenere le richieste di vendite: il mercato dei tulipani crollò del tutto e le negoziazioni s'interruppero. Chi aveva acquistato attraverso i *futures* si ritrovò

³ (Consob, Uso dei derivati finanziari)

vincolato contrattualmente a pagarli una cifra notevolmente più elevata rispetto ai prezzi reali del momento, a vantaggio di coloro che possedevano i bulbi e che avendo sottoscritto i contratti *futures* avevano il diritto di percepire quei prezzi elevatissimi, prestabiliti, per dei bulbi che in quel momento non valevano quasi niente.⁴

Alla fine del XVIII secolo, si avvertì l'esigenza di standardizzare questo tipo di contratto, quando i mercanti europei iniziarono a stipulare contratti sul cotone e sul grano importato dagli Stati Uniti.⁵

Dalla seconda metà del XX secolo questi strumenti hanno conosciuto una notevole diffusione legata a vari fattori:⁶

- la fine del sistema internazionale di cambi fissi per la caduta degli accordi di Bretton Woods nel 1971, ed il conseguente emergere del rischio di cambio;
- gli shock petroliferi del 1973 e del 1979 che causarono degli improvvisi aumenti del prezzo del petrolio intensificando il rischio di mercato, sia per le ampie oscillazioni dei prezzi, sia per le conseguenze sull'inflazione;
- la globalizzazione dei mercati e l'introduzione dei computer, che hanno permesso di velocizzare complessi calcoli;
- la modellizzazione teorica per il calcolo del prezzo dei derivati, attraverso il lavoro di **Black, Scholes e Merton**.

Tra il 1989-1992 i derivati si diffusero in modo rilevante arrivando ad una consistenza complessiva pari a 20.000 miliardi di dollari. Nel dicembre 2010, il valore complessivo delle attività sottostanti i derivati ammontava a circa 670.000 miliardi di dollari, di cui 601.048 per derivati *over the counter*⁷, in particolare gli *interest rate swaps* per un

⁴ (Consob, La bolla dei tulipani)

⁵ (Consob, Uso dei derivati finanziari)

⁶ (Consob, Uso dei derivati finanziari)

⁷ 'Mercato mobiliare non soggetto ad alcuna regolamentazione specifica relativa all'organizzazione e al funzionamento del mercato stesso. L'assenza di regolamentazione riguarda il fatto che il funzionamento di tale mercato, i titoli e gli operatori ammessi non sono assoggettati alla disciplina specifica e alla autorizzazione delle Autorità di Vigilanza in materia di Mercati Regolamentati e non sono iscritti nell'apposito albo' cit. (Borsa Italiana, Mercato Over the Counter)

ammontare pari a 364.378 miliardi di dollari. Considerato che il PIL mondiale, nel 2010, era stato stimato in circa 70.000 miliardi di dollari, è facile comprendere il livello di leva finanziaria⁸ attraverso l'utilizzo dei prodotti derivati.⁹

1.3 Il mercato IDEM

Il mercato regolamentato destinato alla negoziazione dei contratti derivati *futures* e *option* aventi come sottostante indici e titoli azionari, è il mercato IDEM, acronimo di *Italian Derivates Equities Market*, la cui disciplina è rimessa al regolamento dei mercati organizzati e gestiti da Borsa Italiana S.p.A.¹⁰.

L'IDEM è nato il 28 novembre 1994, con l'avvio delle negoziazioni telematiche sul FIB30 (*future* sull'indice MIB30). A partire dal novembre 1995 è iniziata la negoziazione del MIBO30 (opzione sul MIB30). A febbraio 1996 sono stati introdotti i primi 5 contratti d'opzione ISOalfa¹¹ il cui numero è aumentato nel corso degli anni. Dal marzo 1998 la negoziazione sull'IDEM riguarda anche il FIDEX (*future* sul MIBEX). Dal 3 luglio 2000 è stato introdotto il contratto *future* MiniFIB30 (*future* sull'indice MIB 30). Dal luglio 2002 sono negoziati sull'IDEM contratti *futures* su azioni. Attualmente, quindi, sull'IDEM sono negoziati contratti *futures* sugli indici S&P/MIB e MiniS&P/MIB e su singole azioni, contratti di opzione sull'indice S&P/MIB e su singoli titoli. Le attività

⁸ Per una spiegazione si rimanda al paragrafo 1.4.

⁹ (Consob, Uso dei derivati finanziari)

¹⁰ 'Borsa Italiana S.p.A. nasce nel 1998 a seguito della privatizzazione dei mercati di borsa italiani e svolge attività di organizzazione e gestione del funzionamento dei mercati di strumenti finanziari.

I compiti principali di Borsa Italiana S.p.A. riguardano:

- la vigilanza sul corretto svolgimento delle operazioni di borsa;
- la definizione dei requisiti e delle procedure di ammissione e permanenza sul mercato per le società emittenti;
- la definizione dei requisiti e delle procedure di ammissione per gli intermediari che operano sui mercati;
- la gestione dell'informativa sulle società quotate.' cit. (Borsa Italiana, Istituzioni del Sistema Finanziario)

A seguito della fusione, nel 2007, con la borsa londinese, Borsa Italiana S.p.A. fa parte del London Stock Exchange Group.

¹¹ Sono opzioni su singole azioni ammesse alla quotazione ufficiale in Borsa: ISO è l'acronico di *Individual Stock Option* ed *alfa* sta per il nome dell'azione.

sottostanti possono essere strumenti finanziari, tassi di interesse, valute, merci e relativi indici, devono possedere requisiti di liquidità e continuità delle negoziazioni e di disponibilità delle informazioni rilevanti per il corretto funzionamento del mercato.¹²

E' uno dei maggiori mercati dei derivati nel panorama europeo. Vengono scambiati circa 200.000 contratti al giorno, per un controvalore nozionale¹³ di circa 3.7 miliardi di euro. Il mercato IDEM include due segmenti:¹⁴

- IDEM *Equity*, sul quale sono listati *futures* su indici e titoli italiani ed europei ed opzioni su singole azioni italiane e su indici, tra i quali l'indice principale del mercato azionario di Borsa Italiana, il FTSE MIB¹⁵;
- IDEX, segmento dedicato ai derivati su *commodities*, riservato agli investitori istituzionali.

Tra il 2005 e il 2011, il mercato IDEM si è sviluppato molto rapidamente, facendo registrare un tasso di crescita annuo composto (CAGR) del 10%. Questa crescita continua è legata alla forte partecipazione degli investitori istituzionali e della clientela *retail*, quest'ultima supportata dalle iniziative realizzate direttamente da Borsa Italiana.¹⁶

Il funzionamento di tale mercato prevede che le negoziazioni avvengano su un apposito circuito telematico collegato con quello sottostante. Per i contratti di opzione sull'indice FTSE MIB¹⁷, le opzioni e i contratti *futures* su azioni è prevista una fase di negoziazione continua¹⁸ che va dalle ore 9:00 alle ore 17:50, mentre per i contratti *futures* e *mini-*

¹² cit. (Borsa Italiana, IDEM)

¹³ 'Importo assunto come base di calcolo per l'adempimento degli obblighi associati a uno strumento derivato o titolo assunto a riferimento come sottostante per il *pricing* di un contratto derivato.' cit. (Borsa Italiana, Controvalore Nozionale)

¹⁴ (Borsa Italiana, IDEM - Il mercato italiano dei derivati)

¹⁵ 'Il FTSE MIB è il principale indice di riferimento per il mercato azionario italiano. Esso rappresenta i 40 titoli più liquidi e a più elevata capitalizzazione presenti sul mercato azionario italiano' cit. (Borsa Italiana, Il Mercato Italiano dei Derivati: un'opportunità ad alto potenziale)

¹⁶ (Borsa Italiana, IDEM - Il mercato italiano dei derivati)

¹⁷ Detti anche MIBO.

¹⁸ Durante la fase di negoziazione continua, la conclusione dei contratti avviene istantaneamente, per le quantità disponibili, mediante l'abbinamento automatico delle proposte di segno opposto.

*futures*¹⁹ su FTSE MIB è prevista, oltre alla fase di negoziazione continua, anche una fase di asta di apertura²⁰ che va dalle ore 8.30 alle ore 9.00.

Nel mercato IDEM, la Cassa di Compensazione e Garanzia (CC&G) svolge le funzioni di *Clearing House*: assolve, cioè, al ruolo di controparte centrale, ponendosi come compratore (venditore) nei confronti di chi vuol vendere (acquistare) garantendo, in tutte le negoziazioni eseguite, il buon fine delle operazioni di compravendita.

I soggetti che sono abilitati all'operatività sul mercato IDEM sono:

- le imprese d'investimento: società di intermediazione mobiliare (SIM) e imprese d'investimento comunitarie ed extra-comunitarie;
- le banche autorizzate dalla Banca d'Italia;
- gli agenti di cambio ancora in carica²¹, che possono operare solo come *broker*, immettendo ordini solo per i clienti e non per conto proprio.

Le proposte di negoziazione inserite sono in forma anonima e possono prevedere delle modalità di esecuzione, quali:

- Parametri di prezzo:

¹⁹ Detti rispettivamente FIB e miniFIB. Per un approfondimento si rimanda al paragrafo 1.6.1.1.

²⁰ La fase di asta di apertura è un'asta a chiamata che ha luogo all'inizio della seduta di borsa, prima della fase a negoziazione continua. Questa fase si divide in tre sub-fasi: la fase di pre-asta, che termina in un istante casuale tra le 9:00:00 e le 9:00:59, in cui vengono inserite le proposte di negoziazione e si calcola il prezzo teorico d'asta; la fase di validazione nella quale si verifica che il prezzo precedentemente calcolato non superi di una certa percentuale, stabilita da Borsa Italiana, il prezzo statico, altrimenti viene attivata l'asta di volatilità reiterata fino a quando il prezzo non soddisfa le condizioni di validità; la fase d'asta in cui le proposte aventi un prezzo uguale o migliore (più alto per gli acquisti e più basso per le vendite) del prezzo di asta sono trasformate in contratti, tutti allo stesso prezzo d'asta.

²¹ La figura dell'agente di cambio, con la Legge n. 1 del 1991 che ha disciplinato l'attività di intermediazione mobiliare e ha introdotto le società di intermediazione mobiliare, è diventata una categoria ad esaurimento poiché fu stabilito che non fossero più banditi nuovi concorsi per agenti di cambio e che gli agenti in attività avrebbero potuto continuare ad esercitare la professione, con gli stessi limiti di prima, fino al pensionamento. (Cartei, Quirici, Bellandi, & Lazzeretti, 2010)

- *limit orders*: ordini con limite di prezzo che vengono eseguiti rispettando la priorità prezzo-tempo;
 - esegui comunque (per i *market orders*): indicano di acquistare o vendere al miglior prezzo disponibile;
 - proposte di negoziazione al prezzo di asta;
 - esegui o cancella (*fill or kill*): la proposta viene eseguita al miglior prezzo sul mercato altrimenti viene cancellata;
- Parametri di tempo:
 - valido sino alla cancellazione: la proposta è valida fino al termine massimo consentito dal sistema e poi viene automaticamente cancellata;
 - valido sino a data specifica: la proposta è valida fino alla data specificata;
- Parametri sulla fase di mercato:
 - valido solo in asta di apertura: la proposta è valida solo per l'asta di apertura;
 - valido solo in asta di chiusura: la proposta è valida solo per l'asta di chiusura;
 - valido per la seduta: la proposta è valida al massimo fino al termine della seduta;
- Parametri di quantità:
 - esegui e cancella (*fill and kill*): la proposta viene eseguita per le quantità disponibili sul mercato e la quantità residua viene cancellata;
 - esegui per quantità minima specificata: la proposta viene eseguita almeno per la quantità minima specificata;
 - tutto o niente: la proposta viene eseguita per la quantità richiesta altrimenti viene cancellata;
 - ordini con quantità nascosta (*iceberg orders*): ordini con limite di prezzo che permettono la visualizzazione sul *book* solo di una parte della quantità totale.

Inoltre è prevista la possibilità di applicare il meccanismo delle *stop loss*: tale parametro permette all'operatore di definire un determinato livello di prezzo, *trigger price*, al raggiungimento del quale si attiva automaticamente la procedura per liquidare la posizione assunta. Questo permette di contenere le perdite in caso di andamento avverso

del mercato. La dimensione delle perdite, e quindi il livello di prezzo a cui inserire lo *stop loss*, dipende dal grado di avversione al rischio dell'investitore, ma occorre tener presente che un livello troppo vicino alla *trend line*²², determina sì minori perdite, ma è più suscettibile a temporanei movimenti avversi del mercato; viceversa un prezzo più lontano determina una perdita maggiore, ma permette di evitare di incappare in falsi segnali di inversione del *trend* di mercato. Un meccanismo simile è lo *stop and reversal*, che permette di invertire automaticamente la propria posizione al raggiungimento del *trigger price*.

La liquidità del mercato in oggetto è assicurata dalla presenza dei *Market Maker*, soggetti iscritti nell'Elenco degli operatori *Market Maker*, tenuto da Borsa Italiana S.p.A., e dotati di un patrimonio di almeno 10 milioni di euro, che hanno la funzione di garantire la negoziabilità dei titoli, esponendo continuamente le proprie proposte²³ di acquisto e vendita. I market maker si distinguono in: *Primary Market Maker* assoggettati all'obbligo di quotazione continuativa e *Market Maker* soggetti all'obbligo di rispondere alle richieste di quotazione (*quote request*).²⁴

Pur non essendo oggetto di discussione di questa tesi, per completezza di informazioni, è giusto dire che, oltre al mercato IDEM, esiste il mercato SeDeX²⁵ per la negoziazione dei derivati cartolarizzati²⁶ quali *Covered Warrant*²⁷ e *Leverage Certificate*²⁸. Sono strumenti

²² La *trend line* rappresenta graficamente come si muove il prezzo nel tempo. In un *trend* rialzista, la *trend line* sarà disegnata da punti di minimo successivi crescenti e prenderà il nome di supporto; in un *trend* ribassista, la *trend line* sarà disegnata da punti di massimo successivi decrescenti e prenderà il nome di resistenza.

²³ Sulla scadenza più vicina fino al quarto giorno precedente alla scadenza stessa e, a partire da quella data, sulla scadenza immediatamente successiva.

²⁴ (Banfi, 2013)

²⁵ Acronimo di *Securities Derivates*.

²⁶ Ovvero strumenti derivati le cui caratteristiche sono incorporate in un titolo negoziabile al portatore.

²⁷ 'I *Covered Warrant* sono titoli rappresentativi di opzioni: incorpora, nella forma di un titolo liberamente trasferibile, il diritto di acquistare o di vendere un determinato sottostante ad un determinato prezzo (*strike price*) entro un periodo prefissato (stile "americano"), oppure alla data di scadenza prefissata (stile europeo)' cit. (Borsa Italiana, Covered Warrant e Leverage Certificate)

²⁸ 'I *certificates* sono strumenti finanziari derivati cartolarizzati che replicano, con o senza effetto leva, l'andamento dell'attività sottostante' cit. (Borsa Italiana, Covered Warrant e Leverage Certificate)

di gestione passiva che replicano l'andamento del sottostante senza prevedere una gestione attiva come nei fondi. Vengono emessi da banche che si assumono l'obbligo di rimborsare gli strumenti in caso di esercizio.

1.4 I contratti derivati

Dopo una iniziale, ma doverosa, contestualizzazione, esaminiamo più nel dettaglio le caratteristiche degli strumenti derivati.

Tali strumenti sono così definiti perché il loro valore è direttamente collegato a quello dell'attività sottostante, *underlying asset*, che può assumere diversa natura: i *financial derivatives* hanno come attività sottostante uno strumento finanziario come le azioni, una valuta, un tasso d'interesse o un indice; il sottostante dei *commodities derivatives*, invece, è un'attività reale come l'oro, il petrolio, il caffè, il cacao, il grano ed altre materie prime.

A seconda dei vincoli per i due contraenti, i derivati si dividono nelle seguenti categorie:

- simmetrici: i contraenti sono entrambi vincolati. Rientrano in questa categoria i *futures*, i *forwards*, gli *swaps*;
- asimmetrici: l'acquirente dello strumento ha la facoltà di decidere se dare esecuzione al contratto, mentre il venditore è in ogni caso obbligato ad onorare il contratto. Rientrano in questa categoria le opzioni.

Ulteriore classificazione riguarda i mercati dove possono essere negoziati. I derivati infatti si dividono in standardizzati e non standardizzati:

- i *futures*, le opzioni, i *warrants*, i *covered warrants* e gli ETF²⁹ (*exchange traded fund*), avendo caratteristiche definite per scadenza, modalità di fissazione del

²⁹ E' una particolare tipologia di fondo d'investimento o Sicav con due principali caratteristiche: è negoziato in Borsa come un'azione e ha come unico obiettivo d'investimento quello di replicare l'indice al quale si riferisce (*benchmark*) attraverso una gestione totalmente passiva. (Borsa Italiana, ETF)

prezzo, liquidazione, oneri delle controparti e taglio minimo, sono negoziati sui mercati regolamentati³⁰;

- i *forwards* e gli *swaps* non sono contratti standardizzati perché le caratteristiche del contratto vengono liberamente stabilite di volta in volta dalle parti, e vengono negoziati fuori borsa (*over the counter*).

Questo fa sì che i contratti derivati standardizzati siano più liquidi rispetto a quelli negoziati sui mercati *over the counter* perché sono più facilmente scambiabili.

I soggetti impegnati nella compravendita sono il venditore e l'acquirente del contratto derivato: l'acquirente, colui che a scadenza si impegna a corrispondere il prezzo di consegna prefissato ricevendo in cambio il sottostante, assume una posizione detta *long*; il venditore, che viceversa a scadenza consegna il sottostante dietro pagamento del prezzo di consegna, assume una posizione detta *short*.

I motivi che portano alla stipula di un contratto derivato sono diversi:

- finalità speculative: l'investitore scommette sull'evoluzione futura dell'andamento di un certo titolo attraverso il derivato, senza posizionarsi sul mercato sottostante. Si parla di *trading direzionale* e occorre prestare particolare attenzione all'effetto leva che comporta un rischio da non sottovalutare: infatti un soggetto ha la possibilità di acquistare o vendere attività finanziarie per un ammontare superiore al capitale posseduto. L'investitore investe solo un margine iniziale che rappresenta una percentuale dell'effettivo prezzo che dovrebbe pagare se investisse direttamente nel sottostante. La leva è uguale al rapporto tra controvalore del contratto e l'importo versato: l'effetto leva è tanto maggiore quanto minore è il margine. Vi è un effetto moltiplicatore e, conseguentemente, ciò permette di beneficiare di un maggior rendimento potenziale ma, contestualmente, di esporsi anche al rischio di perdite significative. Altro elemento da tenere ben presente è che le diverse leve finanziarie si possono cumulare: in questo modo si realizzano operazioni di speculazione utilizzando una 'leva finanziaria al quadrato'. Il fenomeno legato al *leverage* è particolarmente

³⁰ Il mercato regolamentato è un 'mercato mobiliare basato su una specifica regolamentazione relativa all'organizzazione e al funzionamento del mercato stesso e gestito da una società di gestione' cit. (Borsa Italiana, Mercato Regolamentato)

diffuso nei mercati finanziari, complice la presenza di bassi margini grazie ai quali è possibile controllare un controvalore rilevante impiegando poche risorse finanziarie. Sappiamo che un determinato livello di *leverage* è fisiologico per sostenere la crescita economica, anche se non abbiamo indicazioni di quale sia il livello ottimale. La storia, però, ci insegna come, in un sistema economico-finanziario sempre più globalizzato e interdependente, la leva finanziaria possa rappresentare un fattore scatenante delle bolle speculative. Ed è in questi periodi che si genera lo scollamento più forte tra finanza ed economia reale;³¹

- finalità di arbitraggio: gli arbitraggisti cercano di sfruttare le temporanee discrepanze dei prezzi nei due mercati, cioè lo squilibrio tra il prezzo del derivato e dello strumento sottostante. L'arbitraggio permette di ottenere un profitto immediato, certo e senza rischio, ma è un'opportunità che dura molto poco sui mercati;
- finalità di copertura (*hedging*): i derivati permettono di trasferire il rischio dagli operatori che vogliono ridurre la propria esposizione al rischio a chi, invece, è maggiormente in grado di sopportarlo. L'obiettivo è, dunque, quello di proteggere un singolo titolo o un portafoglio titoli dall'andamento avverso del mercato: il derivato, costruito sullo stesso sottostante che si vuole coprire, permette di bilanciare le perdite (guadagni) sul sottostante con i guadagni (perdite) sul derivato. Data una posizione rischiosa originaria, si sterilizza il rischio con una posizione uguale e contraria.

La finalità di copertura è quella che maggiormente ci interessa nell'ambito di questa tesi, per tanto è utile approfondire l'argomento.

La copertura può essere:

- corta (*short hedge*): è opportuna quando chi possiede un'attività che intende vendere in futuro, vuole proteggersi da eventuali riduzioni di prezzo. L'*hedger* si pone come venditore sul mercato a termine;

³¹ cit. (Consob, La leva finanziaria)

- lunga (*long hedge*): per chi sa che dovrà acquistare una certa attività in futuro e intende proteggersi da un eventuale rialzo dei prezzi. In questo caso l'*hedger* si pone come acquirente sul mercato a termine;
- totale: quando il rischio viene completamente coperto;
- parziale: quando il rischio originario non viene compensato completamente dall'operazione di copertura e residua un'esposizione al rischio. In particolare si identificano la copertura parziale simmetrica, che è la copertura realizzata con i contratti derivati simmetrici, mentre la copertura parziale asimmetrica è realizzata con i contratti derivati asimmetrici;
- perfetta: se dall'operazione di copertura non emerge alcun rischio ulteriore, oltre al rischio originario residuo in caso di coperture parziali;
- imperfetta: se dall'operazione di copertura emergono ulteriori rischi, spesso non quantificabili al momento della stipula del contratto derivato. Si tratta in questo caso del rischio della base (*basis risk*): perché la copertura sia perfetta è necessario che la base rimanga invariata. In genere, però, la base cambia e la strategia di copertura non compensa le variazioni di prezzo del sottostante. Questa correlazione imperfetta tra i due investimenti crea potenziali utili o perdite in eccesso rispetto alla strategia di copertura, aggiungendo così rischio alla posizione assunta. In altre parole, la base può presentare oscillazioni tali da rendere inefficace la copertura stessa. Il rischio della base è tutt'altro che trascurabile: tale rischio è tanto più rilevante quanto maggiore è la volatilità dei prezzi, che normalmente è più elevata nei mercati dei *futures*.³²
- statica: detta anche *hedge and forget*, si tratta di una strategia di copertura che non è soggetta ad aggiustamenti per essere efficace: una volta impostata la strategia, l'investitore non la modificherà più;
- dinamica: la copertura per essere efficace richiede degli aggiustamenti più o meno frequenti. Questo comporta un maggior costo in termini di costi di transazione³³.

³² (Gramatica, 2002)

³³ Per una trattazione più ampia sui costi di transazione si rimanda ai paragrafi 3.1 e 3.2.

1.5 Successo e rischi dei contratti derivati

Data la storia della loro evoluzione e sulla base delle caratteristiche che li contraddistinguono, si intuisce perché gli strumenti derivati abbiano conosciuto un rapido sviluppo ed una larga diffusione.

Il successo dei derivati è legato essenzialmente alla facilità di utilizzo da parte degli investitori. Ciò che è possibile fare sul mercato a pronti, talvolta, in modo complicato e soprattutto costoso, può essere fatto sul mercato dei derivati in modo semplice e poco oneroso. Permettono di speculare e realizzare strategie di copertura con costi di transazione limitati e senza la necessità di ingenti capitali iniziali. I mercati regolamentati su cui si negoziano i derivati danno la sicurezza agli operatori di non essere esposti al rischio di controparte, garantiscono un elevato grado di liquidità e grazie alla leva permettono di far fronte inizialmente ad un ammontare parziale del valore del contratto, che corrisponde al cosiddetto margine nel caso dei *futures* e al premio nel caso delle opzioni.

A fronte di tutto questo, occorre tener ben presente che i derivati rimangono comunque degli strumenti la cui complessità porta ad una difficile comprensione dei reali rischi che sono ad essi connessi. In particolare modo per quanto riguarda gli strumenti derivati negoziati sui mercati *over the counter* che sono caratterizzati dal rischio di controparte e di liquidità in quanto non è previsto alcun soggetto che svolga il ruolo di *Clearing House*. Essendo mercati privi di regolamentazione, è facile cadere in operazioni complesse e poco trasparenti nelle quali, tenendo conto che i profitti di una parte sono la perdita dell'altra³⁴, la parte più esperta e meglio informata potrebbe ottenere dei profitti elevati sfruttando l'inesperienza e la minore informazione della controparte.

Gli strumenti derivati potrebbero essere degli strumenti positivi per vari motivi:

- grazie al lavoro degli arbitraggisti, che sfruttano i disequilibri dei prezzi nei due mercati, l'eventuale maggiore efficienza del mercato dei derivati rispetto al

³⁴ In quanto la negoziazione di un derivato è sempre un gioco a somma zero.

mercato sottostante potrebbe far sì che quest'ultimo diventi a sua volta più efficiente;

- i contratti derivati permettono il trasferimento del rischio da un soggetto più avverso al rischio ad un soggetto maggiormente capace di sopportarlo (ad esempio perché ha un portafoglio maggiormente diversificato). Ciò favorisce una riallocazione ottimale dei rischi a livello globale;
- se fosse vero quanto detto sopra, allora gli strumenti derivati contribuirebbero alla crescita economica mondiale, anche se, alla luce della recente crisi finanziaria (e reale), tale argomentazione oggi sembra difficile da sostenere.³⁵

1.6 Le principali tipologie di contratti derivati

Analizziamo adesso le principali tipologie di strumenti derivati.

1.6.1 I *Futures*

Un *future* è un 'contratto a termine standardizzato con il quale le parti si impegnano a scambiare un'attività a un prezzo prefissato e con liquidazione differita a una data futura'³⁶, scambiato sui mercati organizzati. E' un derivato simmetrico in quanto entrambi i contraenti sono obbligati a scadenza ad effettuare lo scambio: il soggetto che acquista il *future* assume una posizione lunga e dovrà acquistare a scadenza l'attività sottostante, mentre il soggetto che vende il *future* assume una posizione corta e si impegna a consegnare a scadenza l'attività sottostante.

La standardizzazione del contratto riguarda:

- oggetto: cioè il sottostante;
- dimensione: cioè il valore nozionale del contratto che si ottiene moltiplicando il valore dell'indice, espresso in punti indice, per un moltiplicatore prestabilito;
- scadenza: usualmente le scadenze sono quattro: Marzo, Giugno, Settembre, Dicembre;

³⁵ (Barontini)

³⁶ cit. (Borsa Italiana, Future Finanziario)

- regole di negoziazione: orari di negoziazione, variazione minima di prezzo che può essere quotata sul mercato (*tick*); modalità di liquidazione, luogo di consegna.

Alle controparti resta solo da definire il prezzo.

In base all'attività sottostante, il contratto *future* assume diverse denominazioni: *commodity future*, se il sottostante è una merce (oro, petrolio, caffè, cacao, grano ed altre materie prime); *financial future* nel caso di un'attività finanziaria (azioni, valute, tasso d'interesse o un indice). Se il contratto giunge a scadenza, potrà essere liquidato per *cash settlement* per il controvalore monetario, oppure potrà avvenire la consegna fisica del sottostante, tranne, per ovvi motivi, quando il sottostante è un indice. Nella maggior parte dei casi, i *future* finanziari non si concludono con la consegna fisica del sottostante, poiché gli operatori preferiscono chiudere le posizioni aperte rivendendo (acquistando) il contratto *future* precedentemente acquistato (venduto), risparmiando i costi relativi alla consegna.

Elemento caratterizzante è l'intervento della *Clearing House* che si interpone in tutti gli scambi divenendo essa stessa controparte centrale di ogni transazione e assumendosi gli obblighi ed eventualmente rivalendosi sulla controparte inadempiente. Ciò garantisce la compensazione e liquidazione giornaliera dei contratti ed il buon fine dell'operazione, eliminando il rischio di controparte. Quest'ultimo obiettivo è raggiunto mediante la selezione delle controparti, che devono essere intermediari iscritti alla *Clearing House* e che devono avere specifici requisiti patrimoniali e professionali, ed adottando il sistema dei margini.

Il sistema dei margini è un importante strumento di garanzia il cui funzionamento prevede il versamento di margini iniziali, margini di variazione e margini aggiuntivi. Il margine iniziale è versato all'apertura della nuova posizione sia dall'acquirente che dal venditore del derivato, in percentuale al controvalore del contratto. Il margine di variazione viene calcolato attraverso il meccanismo del *mark to market*, ovvero la *Clearing House* rileva ogni giorno il prezzo di chiusura del *future* e calcola la differenza di valore con il valore del giorno precedente. Queste danno luogo ad un accredito per la parte che ha avuto una variazione positiva, e contestualmente risulta un addebito per la controparte che è in perdita. Nel caso in cui una parte non corrisponda la perdita giornaliera maturata, cioè

non versi il margine di variazione, la *Clearing House* utilizza il margine iniziale per corrispondere il profitto maturato dalla controparte e invita la parte inadempiente a reintegrare il margine iniziale (*margin call*). Ove ciò non avvenga, la *Clearing House* provvede a chiudere la posizione della parte che non ha versato il margine, evitando così futuri inadempimenti. In qualsiasi momento prima della scadenza del contratto, l'operatore può chiudere la propria posizione negoziando una posizione opposta a quella originaria, rendendo così definitivi i guadagni o le perdite realizzate fino a quel momento. Infine potrebbero essere richiesti dei margini aggiuntivi in caso di eventi eccezionali che determinino delle forti oscillazioni del prezzo del sottostante superiori ad una determinata percentuale prestabilita.³⁷ Il sistema dei margini, quindi, prevede dei flussi di cassa durante tutta la durata del contratto e alla scadenza verrà restituito alle parti il margine inizialmente versato. Attraverso questo sistema le parti sono sempre tutelate dal rischio di inadempimento.

Il prezzaggio dei *futures* avviene attraverso il modello del *Cost of Carry*, un modello di non arbitraggio dove il costo di trasferimento è la variabile che riassume la relazione esistente tra prezzo *future* e il prezzo *spot* di un bene o di una attività finanziaria. Esso è dato dal costo di immagazzinamento dell'attività sottostante il contratto più il tasso di interesse pagato per finanziare l'acquisto di tale attività, meno i redditi derivanti da tale attività. Tale relazione sarà: $F_0 = S_0 e^{(r-y)T}$, dove r è il *free-risk rate*, T è il tempo alla scadenza e y rappresenta il tasso di convenienza, ossia il beneficio che deriva dal possesso diretto di una determinata merce rispetto al possesso di una posizione lunga con il *future* sulla medesima merce³⁸ (ad esempio potrebbe essere il *dividend yield*, nel caso in cui il sottostante fosse un'azione). Alla scadenza il controvalore del *future* sarà uguale al prezzo del sottostante. Se la relazione esistente tra prezzo *future* e il prezzo *spot* di un bene o di una attività finanziaria non fosse rispettata, ci sarebbero delle opportunità per gli arbitraggisti che potrebbero conseguire un profitto privo di rischio effettuando un *arbitraggio cash and carry*, nel caso il prezzo di mercato del *future* fosse maggiore del valore di equilibrio, oppure un *arbitraggio reverse cash and carry*, nel caso il prezzo del *future* fosse inferiore a quello di equilibrio.

³⁷ (Cartei, Quirici, Bellandi, Lazzeretti, 2010)

³⁸ cit. (Borsa Italiana, Cost of Carry)

1.6.1.1 I *Futures* sull'indice FTSE MIB

Gli *stock index futures* sono i *futures* il cui sottostante è un indice azionario. In questo caso prendiamo in considerazione il FTSE MIB che è il principale indice azionario della Borsa Italiana. Questo racchiude le azioni delle 40 maggiori società italiane ed estere quotate sui mercati gestiti da Borsa Italiana ed il metodo di calcolo dell'indice è *value weighted*, dove il peso di ciascun titolo è proporzionale alla sua capitalizzazione di borsa.

Sul mercato IDEM, esistono due contratti *future* sull'indice FTSE MIB, ovvero il FTSE *future* ed il mini FTSE *future*, la cui differenza sta nella dimensione del contratto: nel caso del FTSE *future* ad ogni punto indice è assegnato un valore di 5 euro, mentre per quanto riguarda il mini FTSE *future* ad ogni punto indice è assegnato un valore di 1 euro. Per tanto il valore del contratto è dato dal prodotto tra il prezzo (espresso in punti indice) ed il moltiplicatore.

I *futures* sull'indice azionario possono avere scadenza mensile o trimestrale. In ciascuna seduta, nel caso dei FTSE *future* sono quotate contemporaneamente le quattro scadenze³⁹ trimestrali più vicine, mentre nel caso dei mini FTSE *future* sono quotate le due scadenze più vicine. La variazione minima del prezzo è di 5 punti indice.

Come gli altri contratti derivati negoziati nei mercati regolamentati, anche gli *stock index futures* non si sottraggono al sistema dei margini e alla scadenza il regolamento di tali strumenti avviene tramite *cash settlement*.

1.6.2 I *Forwards*

I contratti *forwards* sono simili ai contratti *futures*, ma si distinguono da questi in quanto negoziati al di fuori dei mercati regolamentati. Infatti, pur essendo contratti simmetrici, non sono contratti standardizzati, per tanto non è la Borsa a definire le caratteristiche del

³⁹ Ricordando che le scadenze, nel caso dei derivati standardizzati, sono Marzo, Giugno, Settembre, Dicembre.

contratto, ma sono le parti che si accordano per comprare o vendere il sottostante ad una data futura e ad un prezzo prestabilito.

Essendo negoziati sui mercati *over the counter*, non beneficiano della garanzia offerta dalla *Clearing House* e questo fa sì che tali contratti siano soggetti al rischio di controparte. Data, inoltre, l'assenza del sistema dei margini, gli unici flussi di cassa si manifestano alla scadenza, quando l'acquirente riceve il bene sottostante in cambio del prezzo concordato nel contratto, se è stato previsto il *physical delivery*, oppure, nel caso del *cash settlement*, le due parti si scambiano la differenza fra il prezzo di mercato dell'attività alla scadenza ed il prezzo di consegna indicato nel contratto che, se positiva, sarà dovuta dal venditore all'acquirente, viceversa se negativa. I costi associati alla negoziazione dei *forwards* sono, oltre al costo per l'acquisto, i costi di transazione quali tasse e commissioni dell'intermediario che effettua la negoziazione per conto dell'investitore.

1.6.3 Gli Swaps

‘Uno swap è un contratto derivato simmetrico con il quale due soggetti si impegnano a scambiare periodicamente delle somme di denaro calcolate applicando al medesimo capitale (detto nozionale) due differenti parametri riferiti a due diverse variabili di mercato.’⁴⁰ Le controparti si accordano, quindi, per scambiarsi, a determinate date certe, flussi di cassa connessi all'attività sottostante. Le principali e più diffuse categorie di *swap* sono:

- *interest rate swaps*: i flussi di pagamenti sono basati uno su un tasso di interesse fisso, mentre l'altro è indicizzato a un tasso di interesse variabile;
- *currency swaps*: i contraenti si scambiano flussi per capitale e interessi in due valute differenti;
- *commodity swaps*: i periodici e reciproci flussi di cassa avvengono l'uno in base ad un parametro fisso e l'altro in base a un parametro variabile che rispecchia l'andamento del prezzo dell'attività sottostante, che è un'attività reale;

⁴⁰ cit. (Borsa Italiana, Swap)

- *credit default swaps*: a fronte di pagamenti periodici effettuati a favore della controparte, questa si protegge dal rischio di credito nel caso si verifichi il *default* dell'emittente del sottostante.

Lo scambio dei pagamenti avviene per via differenziale.

1.6.4 Le Options

Un'opzione è un contratto che concede al compratore il diritto di comprare o vendere un'attività sottostante ad un prezzo prestabilito (*strike price*) entro una determinata data (opzioni americane) o ad una determinata scadenza (opzioni europee). È un contratto asimmetrico perché il compratore (*holder*), dietro pagamento del premio⁴¹ alla controparte, si riserva il diritto di acquistare (vendere) a termine il sottostante, mentre il venditore, o emittente, (*writer*) ha l'obbligo di vendere (acquistare) l'attività sottostante. Analogamente agli altri strumenti derivati, l'acquirente apre una posizione *long*, mentre il venditore apre una posizione *short*.

Le opzioni si dividono in:

- *call*: danno il diritto all'acquirente di acquistare una certa quantità del sottostante ad un determinato prezzo. Questa quindi verrà esercitata quando il valore di mercato del sottostante a scadenza sarà maggiore dello *strike price*;
- *put*: danno il diritto all'acquirente di vendere una certa quantità del sottostante ad un determinato prezzo. Eserciterà tale facoltà quando il valore di mercato del sottostante a scadenza sarà minore dello *strike price*.

L'esercizio dell'opzione dipenderà dal valore del sottostante rispetto al prezzo di esercizio prefissato, ovvero dalla cosiddetta *moneyness* di un'opzione. Per tanto le opzioni si definiscono, inoltre:

- *at the money*: quando il valore del sottostante è pari al prezzo di esercizio. In questo caso l'investitore è indifferente tra esercitare ed abbandonare l'opzione. In genere, però, viene abbandonata per non pagare i costi di transazione. È considerata *at the money* anche quando lo *strike price* è circa uguale al prezzo del

⁴¹ Il premio è il prezzo pagato per l'acquisto del contratto.

sottostante. Non necessariamente, infatti, deve essere esattamente uguale al valore del sottostante;

- *in the money*: quando l'esercizio dell'opzione è conveniente, ovvero quando il valore del sottostante è maggiore allo *strike price*, nel caso della *call*, o viceversa il valore del sottostante è minore del prezzo di esercizio, nel caso della *put*;
- *out of the money*: quando l'esercizio dell'opzione non è conveniente, ovvero quando il valore del sottostante è minore allo *strike price*, nel caso della *call*, o viceversa il valore del sottostante è maggiore del prezzo di esercizio, nel caso della *put*.

Il *pay-off* dell'opzione a scadenza sarà dato dalla differenza tra il valore di mercato del sottostante e il prezzo di esercizio. Non può assumere valore negativo, quindi nel caso in cui il prezzo del sottostante al momento dell'esercizio fosse inferiore al prezzo di esercizio della *call*, e viceversa per la *put*, assumerà un valore nullo e l'investitore non eserciterà il diritto, con una perdita limitata alla somma pagata per il premio.

Il valore di un'opzione è dato dal valore intrinseco e valore temporale:

- il valore intrinseco dipende dal valore del sottostante e dallo *strike price*, ed è dato dalla differenza tra sottostante e prezzo di esercizio nel caso della *call*, viceversa nel caso della *put*. Nel caso di un'opzione *at the money* e *out of the money* il valore intrinseco sarà pari a zero;
- il valore temporale è quel valore che va ad aggiungersi al valore intrinseco e che determina il prezzo dell'opzione. Rappresenta quanto un investitore è disposto a pagare, oltre al valore intrinseco, nella speranza che il sottostante si muova nella stessa direzione della posizione presa, facendo così aumentare di valore l'opzione detenuta. Tale valore dipende da tre fattori: volatilità, tempo alla scadenza, tasso di rendimento.

Il prezzo delle opzioni viene calcolato adottando modelli matematici differenti, più o meno complessi, che tengono conto di molteplici fattori che influenzano il valore di un'opzione: fattori quantificabili e altri fattori, economici e di mercato, non quantificabili. Tra i fattori quantificabili vi rientrano:

- prezzo del sottostante e *strike price*: maggiore è lo scarto tra prezzo di mercato del sottostante e prezzo di esercizio, maggiore sarà il valore intrinseco della *call*. Per quanto riguarda la *call*, maggiore sarà il valore di mercato dell'*underlying*, più elevate saranno le probabilità che l'opzione scada *in the money*; viceversa per la *put*. Al crescere dello *strike price* cresce il valore dell'opzione *put*, mentre decresce quello dell'opzione *call*. Intuitivamente, questo è dovuto al fatto che al crescere dello *strike price* è più probabile che venga esercitata, a scadenza, l'opzione *put* che quella *call*, soprattutto per valori di K maggiori di S . Il valore della opzione *call* sarebbe superiore al valore dell'opzione *put*, nel caso in cui il prezzo corrente del sottostante fosse maggiore dello *strike price*;
- vita residua: più lontana è la scadenza dell'opzione, maggiore sarà il valore temporale dell'opzione perché le probabilità che questa scada *in the money* sono più elevate. Per tanto vi è una correlazione positiva sia col prezzo della *call* che con il prezzo della *put*. Per le opzioni *at the money* la vita residua è irrilevante;
- tassi di interesse: l'influenza del tasso di rendimento è legata al concetto di costo opportunità in quanto all'aumentare dei tassi di interesse aumenta anche il tasso di crescita del valore delle azioni. L'effetto è un aumento del valore della *call* e, viceversa, una diminuzione del valore della *put*;
- dividendi: quello che succede al momento dello stacco del dividendo è che il valore del sottostante diminuisce di un ammontare pari al dividendo stesso. All'acquirente di un'opzione, i dividendi legati al sottostante non vengono pagati, a differenza di chi detiene direttamente il sottostante. Questo impatta direttamente sul valore intrinseco dell'opzione, nello specifico diminuisce il valore della *call* ed aumenta il valore della *put*. Vi è, per tanto, una relazione negativa con la *call* e una correlazione positiva con la *put*;
- volatilità⁴²: una maggiore fluttuazione del valore di mercato del sottostante aumenta la probabilità che l'opzione scada *in the money* e a fronte di una maggiore probabilità di guadagno, la perdita massima è sempre pari al premio pagato per acquistare l'opzione. Ecco, quindi, che il valore temporale delle opzioni *call* e *put* è tanto più elevato quanto maggiore è la volatilità attesa del sottostante.

⁴² La volatilità del prezzo di un titolo ne misura l'incertezza dei tassi futuri di rendimento. Per una trattazione più ampia si rimanda al paragrafo 2.3.1.

Tra i fattori non quantificabili vi rientrano tutte quelle situazioni di mercato in cui regna l'imprevedibilità relativamente al sottostante, nelle quali l'investitore può acquistare delle opzioni sia per la copertura di posizioni in essere, sia per prendere posizione sul mercato.

Come precedentemente detto, essendo contratti standardizzati negoziati sui mercati regolamentati, sono soggetti al sistema dei margini imposto dalla *Clearing House*. Le opzioni possono essere considerate uno strumento finanziario versatile, utile per realizzare una varietà di obiettivi di investimento, non solo speculativi, ma anche di rendimento a medio-lungo termine, per coprire investimenti dal rischio di rialzo o ribasso del mercato o per attuare strategie di investimento altrimenti non realizzabili con altri prodotti finanziari.

1.6.4.1 Le opzioni sull'indice FTSE MIB

Si tratta di contratti derivati il cui sottostante è l'indice FTSE MIB. Vengono comunemente chiamate 'Mibo' e sono negoziate in punti percentuali sul mercato IDEM.

Sono opzioni di tipo europeo, quindi possono essere esercitate solo alla scadenza, tramite *cash settlement*. La scadenza è fissata al terzo venerdì del mese di scadenza alle ore 9:05 ed il regolamento avviene il primo giorno di borsa aperto successivo. A scadenza le opzioni vengono esercitate automaticamente dalla Cassa di Compensazione e Garanzia se queste sono *in the money*, salvo abbandono per eccezione entro le ore 8:30 del giorno di scadenza.

Sul mercato vengono negoziate dieci scadenze diverse: per le opzioni che hanno scadenza entro 12 mesi, le 4 scadenze trimestrali quali Marzo, Giugno, Settembre, Dicembre e le due scadenze mensili più vicine; per le opzioni con scadenza tra i 12 e 36 mesi, le quattro scadenze semestrali dei due anni successivi.

Per tale contratto ogni punto indice vale 2,5 euro. Per tanto il valore nozionale è dato dal prodotto tra il valore della base espresso in punti indice ed il moltiplicatore; il valore del premio è pari al costo del premio per il moltiplicatore. La variazione minima del prezzo del premio varia a seconda del valore del premio: tra 1 e 100 punti indice è un *tick*, tra

102 e 500 sono due *tick*, superiore a 505 punti indice è pari a 5 *tick*. Anche per gli *strike price* delle opzioni ci sono differenze in base all'orizzonte temporale, infatti fino a 12 mesi ci sono 15 prezzi di esercizio con intervalli di 500 punti indice, mentre da 12 a 36 mesi ci sono 21 prezzi di esercizio con intervalli di 1.000 punti indice.⁴³

1.6.4.2 Le opzioni su azioni

Altrimenti dette ISO-alfa, le opzioni su azioni hanno come sottostante un titolo azionario quotato sul mercato IDEM. Anche in questo caso, a scadenza le opzioni vengono esercitate automaticamente dalla Cassa di Compensazione e Garanzia se queste sono *in the money*, salvo abbandono per eccezione entro le ore 8:15 del giorno di scadenza.

I contratti scadono il terzo venerdì del mese di scadenza, alle ore 8:15. Vengono regolate il secondo giorno di borsa aperta successivo alla conclusione del contratto.

Sul mercato sono negoziate le opzioni con le 4 scadenze trimestrali quali Marzo, Giugno, Settembre, Dicembre e le 2 scadenze mensili più vicine.

Il valore nozionale delle opzioni è dato dal prodotto tra lo *strike price* e il lotto minimo di azioni sottostanti stabilito da Borsa Italiana; il valore del premio è pari al costo del premio moltiplicato per il numero di azioni sottostanti ad ogni singolo contratto. La variazione minima del prezzo è di 0,0005 euro.

1.6.4.3 Le greche

Al fine di misurare la sensibilità di un'opzione al variare dei diversi fattori che ne influenzano il valore, vengono utilizzati dei coefficienti di sensibilità, comunemente chiamati greche⁴⁴. Tali indicatori comunicano all'investitore l'impatto che tali fattori hanno sulle proprie posizioni in opzioni.

⁴³ (Borsa Italiana, MIBO - Opzioni su FTSE MIB)

⁴⁴ Perché sono espressi con le lettere dell'alfabeto greco.

Delta

Il *delta* esprime la sensibilità del premio di un'opzione al variare del prezzo del sottostante. Viene calcolato come la variazione del prezzo dell'opzione al variare di una unità, o di un punto percentuale, del prezzo del sottostante, assumendo come costanti gli altri fattori. Dal punto di vista matematico è la derivata prima del valore dell'opzione rispetto al valore del sottostante:

$$[1] \quad \Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

dove V è il valore dell'opzione e S è il valore del sottostante.

Il *delta* indica la probabilità che l'opzione scada *in the money* e rappresenta il rapporto di copertura, ovvero la posizione in titoli equivalente ad una posizione in opzioni. La posizione equivalente in titoli è data dal prodotto tra delta, numero di opzioni e lotto di titoli per opzione.

Il valore del *delta* non è costante, ma assume valori compresi tra 0 e 1 nel caso delle opzioni *call* poiché esiste una relazione positiva tra valore dell'opzione e valore del sottostante: come già detto, ad una variazione positiva del sottostante corrisponde un aumento del valore delle opzioni. Assume valori compresi tra -1 e 0 nel caso delle opzioni *put* in quanto vi è una relazione negativa tra il sottostante e la *put*. Per le opzioni *at the money* il *delta* sarà pari a 0,5. Inoltre, nel caso l'opzione fosse *in the money* il *delta* tenderà a 1 per la *call* e a -1 per la *put*, mentre tenderanno entrambe a 0 nel caso di opzioni *out of the money*.

Più ci si avvicina alla scadenza dell'opzione e più il *delta* dell'opzione *in the money* tenderà a 1, nel caso della *call*, o -1 nel caso della *put*, mentre tenderà a 0, sia nel caso della *call* che nel caso della *put*, qualora l'opzione fosse *out of the money*.

Nel caso di un sottostante caratterizzato da elevata volatilità, il *delta* dell'opzione tenderà a 0,5 sia per la *call* che per la *put*. Questo perché la probabilità che scada *in the money* o *out of the money* è in entrambi i casi pari al 50%. Se, invece, il sottostante è poco volatile

è probabile che l'opzione rimanga *in the money*, e quindi il *delta* tenderà, rispettivamente, a 1 o -1, oppure che rimanga *out of the money* e quindi tenderà per entrambe a 0.

Il *delta* assume molta importanza nel caso in cui un investitore voglia effettuare un'operazione di copertura. Si parla infatti di *delta hedging* che consiste nel combinare la vendita di un'opzione sul titolo sottostante con l'acquisto diretto di *delta* unità del sottostante. Un portafoglio sì fatto comporta una posizione *delta neutral*, ossia neutrale rispetto al *delta*. Ciò significa che una determinata variazione nel valore della posizione sull'attività sottostante viene perfettamente compensata da una variazione di pari entità, ma di segno contrario, del valore della posizione in derivati. La condizione di neutralità rispetto al *delta* si mantiene, però, per un periodo di tempo relativamente breve, fintanto che non interviene una variazione nel prezzo del sottostante. Per tale motivo le strategie di copertura basate sul mantenimento di un portafoglio *delta neutral* richiedono un ribilanciamento periodico del portafoglio stesso.⁴⁵

Gamma

Il *gamma* misura la variazione del *delta* di un'opzione rispetto ad una variazione unitaria del prezzo del sottostante, assumendo costanti gli altri fattori. In termini matematici è la derivata seconda del valore dell'opzione rispetto al valore del sottostante:

$$[2] \quad \Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Il *gamma* non viene definito in funzione del tipo di opzione negoziata, sia essa *call* o *put*, ma rispetto alla posizione assunta sull'opzione: posizione di acquisto (*long*) o di vendita (*short*). Il *gamma* può variare tra 0 e 1 nel caso di posizione *long*, mentre assume valori tra 0 e -1 per posizioni *short*. Un valore elevato indica che il *delta* è molto sensibile alle variazioni del sottostante, viceversa se il valore è basso. Il *gamma* sarà maggiore per le opzioni *at the money* poiché sono quelle che possono far registrare la massima variazione del *delta*. Il valore diminuisce man mano che l'opzione diventa *in the money* o *out of the money*.

⁴⁵ cit. (Borsa Italiana, Delta Neutral)

All'approssimarsi della scadenza, il *gamma* aumenta nel caso in cui l'opzione sia *at the money*, poiché può scadere con la stessa probabilità *in* o *out the money*. Se l'opzione è *in the money* o è *out of the money* il *gamma* resta costante per tutta la durata del contratto per poi decrescere velocemente all'avvicinarsi della scadenza poiché a quel punto le variazioni del *delta* saranno poco significative.

Il *gamma* dipende anche dalla volatilità del titolo sottostante: un'opzione *at the money* su un titolo con bassa volatilità avrà un *gamma* più elevato rispetto ad un'opzione su un titolo con volatilità più elevata; su un titolo *out of the money* il *gamma* sarà più elevato nel caso il sottostante abbia una volatilità maggiore.

Il *gamma* è utilizzato nelle strategie dinamiche di copertura. Una strategia di *delta hedging* in cui il *delta* è molto sensibile alle variazioni del prezzo del sottostante, sarà caratterizzata da un *gamma* piuttosto elevato. Richiederà, quindi, frequenti aggiustamenti del portafoglio per mantenere il portafoglio in una condizione di neutralità al *delta*, pena una maggiore rischiosità del portafoglio.

Theta

Il *theta* di un'opzione misura l'impatto del trascorrere del tempo sul valore di un'opzione. E' generalmente espresso in termini numerici che indicano quanto valore perde l'opzione ogni giorno avvicinandosi alla scadenza. In termini matematici, è la derivata prima del valore dell'opzione rispetto al tempo:

$$[3] \quad \theta = \frac{\partial V}{\partial T}$$

Assume sempre valori negati, sia nel caso della *call* che nel caso della *put* in quanto vi è una correlazione negativa tra il valore dell'opzione e lo scorrere del tempo: man mano che si avvicina la scadenza dell'opzione, maggiore sarà il tasso di deprezzamento del valore dell'opzione che non segue un andamento lineare, ma per quadrati temporali.

Rho

Il *rho* esprime la relazione tra la variazione di valore dell'opzione rispetto al tasso di interesse ed assume un valore positivo per la *call*, mentre è negativo nel caso delle opzioni *put*. In termini matematici tale relazione è data dalla derivata prima del valore dell'opzione rispetto al tasso di interesse:

$$[4] \quad P = \frac{\partial V}{\partial r}$$

E' massimo per le opzioni *deep in the money* ed è nullo per quelle *deep out of the money*. Inoltre risulta essere maggiore per i contratti a lunga scadenza.

Vega

Il *vega* esprime la sensibilità di un'opzione al variare della volatilità del sottostante⁴⁶, fornendo una misura della sua variazione. Un valore elevato indica una maggiore sensibilità dell'opzione alla variazione della volatilità. In termini matematici è espresso come la derivata prima del valore dell'opzione rispetto alla volatilità del sottostante:

$$[5] \quad v = \frac{\partial V}{\partial \sigma}$$

E' massimo per le opzioni *at the money* in quanto le opzioni saranno più sensibili alla variabilità del sottostante che le renderà *in* o *out of the money* e va diminuendo man mano che le opzioni diventano *in* e *out of the money*. Inoltre maggiore è il tempo alla scadenza e maggiore sarà il suo valore. Il *vega* impatta solo sul valore temporale dell'opzione.

⁴⁶ Per una trattazione più ampia sulla volatilità, si rimanda al paragrafo 2.3.1.

1.6.4.4 Call-Put parity

Sulla base del principio di non arbitraggio⁴⁷, esiste una relazione matematica tra il premio di un'opzione *call* e quello di un'opzione *put*, europee, che presentano lo stesso sottostante che non paga dividendi, stessa scadenza e stesso *strike price*.

Ipotizziamo che al tempo t_0 si abbia in portafoglio un titolo S_0 , si acquisti una *put* che abbia come sottostante lo stesso titolo che abbiamo in portafoglio, con scadenza T e *strike price* K , e si venda una *call* con stesso sottostante, stessa scadenza e stesso prezzo di esercizio della *put*. All'epoca T , si potranno verificare due scenari:

- Nel caso in cui $S_T > K$, la *put* non viene esercitata, la *call* viene esercitata da chi l'ha acquistata, quindi dovremo vendere il titolo sottostante che abbiamo in portafoglio al prezzo K . Il flusso totale a scadenza sarà pari a $+K$;
- nel caso in cui $S_T < K$, la *call* non viene esercitata, esercitiamo la *put*, quindi vendiamo il titolo sottostante che abbiamo in portafoglio al prezzo K . Il flusso totale a scadenza sarà pari a $+K$.

Adottando questa strategia, non solo è possibile proteggersi dal rischio, ma sappiamo anche che a scadenza, in entrambi i casi, si otterrà lo stesso *pay-off* pari a $+K$. Al tempo t_0 vale, per tanto, la seguente relazione:

$$[6] \quad S_0 + put - call = K(1 + r)^{-T}$$

dalla quale si ricava la *call-put parity*, di seguito riportata

$$[7] \quad S_0 + put = K(1 + r)^{-T} + call$$

La stessa relazione si ottiene, sotto le medesime condizioni di partenza sopra citate, ipotizzando di costruire i seguenti portafogli:

1. un portafoglio in cui abbiamo acquistato una *call* e venduto una *put*;

⁴⁷ E' il principio secondo il quale in mercati concorrenziali, portafogli con flussi di cassa simili devono avere prezzi simili. Una divergenza da tale principio darebbe luogo ad opportunità di guadagno.

2. un secondo portafoglio in cui abbiamo acquistato il titolo sottostante le opzioni del primo portafoglio e abbiamo preso in prestito un ammontare pari allo *strike price* che dobbiamo rimborsare alla stessa data di scadenza delle opzioni. All'epoca T avremo un flusso pari al valore del sottostante al netto del prestito da rimborsare, $S_T - K$.

A scadenza si verificheranno uno dei seguenti scenari:

- Nel caso in cui $S_T > K$, la *put* viene abbandonata, la *call* viene esercitata, quindi acquisteremo il titolo sottostante al prezzo K . Il flusso totale a scadenza sarà $S_T - K$ che è pari al *pay-off* del secondo portafoglio;
- nel caso in cui $S_T < K$, la *call* non viene esercitata, mentre la *put* verrà esercitata da chi l'ha acquistata, quindi dobbiamo acquistare il titolo sottostante al prezzo K . Il flusso totale a scadenza sarà pari a $S_T - K$, anche in questo caso pari al valore del secondo portafoglio.

Le due strategie daranno lo stesso *pay-off*, rispettando la *call-put parity*.

In generale, quindi, la parità *call-put* permette la costruzione di posizioni sintetiche⁴⁸. Le possibili relazioni sono riportate nella seguente tabella:

Posizione effettiva	Posizione sintetica
Acquisto del sottostante $S - K$	$call - put$
Vendita del sottostante $-(S - K)$	$-(call - put)$
Acquisto di una <i>call</i>	$(S - K) + put$
Vendita di una <i>call</i>	$-(S - K) - put$
Acquisto di una <i>put</i>	$-(S - K) + call$
Vendita di una <i>put</i>	$(S - K) - call$

In conclusione, la relazione tra *call* e *put* implica che dato il prezzo di un'opzione *call* europea è possibile calcolare il prezzo equo della corrispondente opzione *put*, e viceversa.

⁴⁸ Una posizione sintetica è una posizione che si ottiene, in modo equivalente all'acquisto o alla vendita diretta di un titolo, utilizzando altri strumenti: in questo caso opzioni *call* e *put* che hanno come sottostante il titolo stesso. La posizione sintetica offre due vantaggi: minor impiego di capitale e minori costi di transazione.

Inoltre, se i prezzi di mercato non soddisfano questa relazione è possibile sfruttare, teoricamente, le opportunità di arbitraggio⁴⁹.

⁴⁹ Spesso, però, i costi di transazione impediscono la possibilità di sfruttare tali opportunità.

2 Modelli di *pricing* delle opzioni

Così come per gli altri strumenti finanziari, anche per i derivati è necessario stabilire il loro valore. Nello specifico l'emittente di un'opzione dovrà determinare il prezzo di emissione che ritiene giusto far pagare agli investitori che intendano acquistarla. Successivamente, quando il titolo sarà negoziato sul mercato secondario, anche gli investitori stessi saranno interessati a determinare il prezzo del titolo e sulla base di questo l'opzione sarà acquistata o venduta per trarne un profitto. In generale quindi, se il mercato è sufficientemente liquido, saranno le forze della domanda e dell'offerta a determinare il valore dell'opzione, ma è comunque necessario determinare il prezzo teorico soprattutto nel caso di gravi carenze di liquidità ed è quasi indispensabile quando devono essere valutate opzioni complesse negoziate nei mercati *over the counter*.

2.1 Il Modello Binomiale

Spesso la valutazione degli strumenti finanziari derivati, ed in particolare la valutazione delle opzioni, richiede l'ausilio di tecniche di approssimazione numerica. Tra questi, l'approccio più semplice e diffuso è quello degli alberi binomiali, che richiedono l'impiego di strumenti matematici elementari, ma che allo stesso tempo forniscono dei risultati sufficientemente accurati.⁵⁰

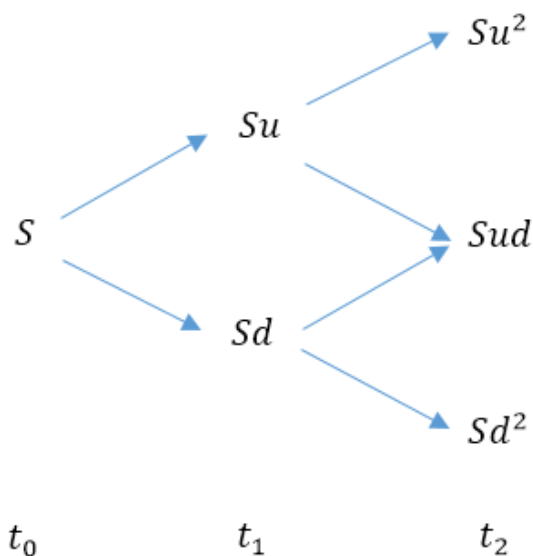
Nel 1979, **John C. Cox** (1943, U.S.), **Stephen A. Ross** (1944, U.S.) e **Mark E. Rubinstein** presentarono il loro modello di prezzaggio di opzioni in un articolo pubblicato sul *Journal of Financial Economics* dal titolo *Option Pricing: A Simplified Approach*. Il modello si basa sul *Lattice-based-model*⁵¹ che permette di derivare il valore dell'opzione ad ogni intervallo temporale, mostrando le possibili variazioni del prezzo del titolo sottostante durante l'intera vita delle opzioni. Dato che tale modello assume degli intervalli di tempo discreti, la peculiarità riguarda la possibilità di riuscire a incorporare nel processo di prezzaggio delle opzioni la volatilità attesa ad ogni intervallo

⁵⁰ (Mininni, 2014)

⁵¹ In finanza un *Lattice-model* è una tecnica usata per valutazione degli strumenti finanziari derivati, che considera un intervallo di tempo discreto, idoneo a prezzare le opzioni americane esercitabili in qualsiasi momento entro la data di scadenza. Al contrario, un modello basato su un intervallo di tempo continuo, come il modello Black-Scholes, permette di valutare le opzioni europee.

temporale, a differenza del modello Black-Scholes che la considera costante per tutta la durata della vita.

La formula di Cox, Ross e Rubinstein permette di determinare il premio di un'opzione europea, oltre a quelle americane, con *strike price* K e scadenza T , suddividendo la vita del contratto in n intervalli di medesima ampiezza $\Delta t = \frac{T}{n}$ e assumendo un modello dinamico di evoluzione del sottostante di tipo binomiale che potrà muoversi al rialzo o al ribasso secondo un multiplo costante, rispettivamente $u = e^{\sigma \Delta t}$ e $d = \frac{1}{u}$, con stessa probabilità p ad ogni *step* temporale. E' possibile monitorare l'andamento del prezzo dell'opzione, ad ogni intervallo, attraverso l'algoritmo retrogrado⁵²: così facendo si costruisce l'albero binomiale del prezzo dell'opzione a ritroso ripetendo l'operazione fino al nodo iniziale, che corrisponde al prezzo a t_0 dell'opzione. Riportiamo di seguito una rappresentazione grafica dell'albero binomiale:



Sia f_{uu} il valore dell'opzione a t_2 nel caso il sottostante abbia subito due rialzi, f_{dd} nel caso abbia subito due ribassi e f_{ud} nel caso in cui si sia verificato un rialzo e un ribasso (o viceversa), il valore dell'opzione a t_1 , nel caso in cui il sottostante abbia avuto un movimento al rialzo, sarà pari al valore attuale del valore atteso dell'opzione:

⁵² Ovvero partendo dai risultati finali si retrocede fino a t_0 .

$$[8] \quad f_u = (1 + r)^{-\Delta t} [pf_{uu} + (1 - p)f_{ud}]$$

Nel caso in cui il sottostante abbia avuto un movimento al ribasso, sarà pari a:

$$[9] \quad f_d = (1 + r)^{-\Delta t} [pf_{ud} + (1 - p)f_{dd}]$$

Il valore a t_0 è per tanto pari a:

$$[10] \quad \begin{aligned} f &= (1 + r)^{-\Delta t} [pf_u + (1 - p)f_d] = \\ &= (1 + r)^{-2\Delta t} [p^2 f_{uu} + 2(1 - p)f_{ud} + (1 - p)^2 f_{dd}] \end{aligned}$$

L'idea di fondo del modello sta nel fatto che per ottenere il valore dell'opzione sia sufficiente costruire un portafoglio di replica composto dal sottostante e da un titolo *risk free*, che replichi il valore dell'opzione nel tempo.

Considerando il caso in cui gli scambi avvengono ad intervalli di tempo sempre più vicini fino ad arrivare ad un'ampiezza infinitesimale pari a $\frac{1}{n}$, ovvero ipotizzando un numero di intervalli temporali che tende all'infinito, $n \rightarrow \infty$, il prezzo della *call*, ma analogamente anche per la *put*, di tipo europeo nel modello binomiale multi periodale corrisponde ad ottenere la formula nota di Black-Scholes come limite:⁵³

$$[11] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} call_0 = S_0 N \left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) - Ke^{-rT} N \left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

Ciò detto, nell'ambito di questa tesi non andremo ad studiare nel dettaglio il modello binomiale, ma ci concentreremo sul caso continuo e sui modelli alternativi ad esso. Per tanto introduciamo adesso il modello di Black-Scholes-Merton.

⁵³ (Ramponi, Fabretti)

2.2 Introduzione al Modello di Black-Scholes

Una delle assunzioni che vengono generalmente prese in considerazione in finanza è che i prezzi si muovano seguendo un *processo di Markov*: in un processo markoviano le variazioni dei prezzi sono di tipo aleatorio e la distribuzione probabilistica del prezzo futuro al tempo t_{m+1} dipenderà solo dal prezzo al periodo precedente t_m . I prezzi correnti racchiudono tutte le informazioni disponibili in quel momento sul mercato⁵⁴, ma le informazioni passate non influenzano i prezzi futuri nel lungo periodo. Diretta conseguenza di quanto affermato è l'infondatezza dell'analisi tecnica⁵⁵.⁵⁶

Si suppone, inoltre, che le variazioni percentuali nei prezzi delle azioni, oltre a seguire un processo markoviano, siano in accordo con un *processo di Wiener*⁵⁷: questo perché, coerentemente con le caratteristiche dei prezzi, seguendo una distribuzione log-normale i prezzi non possono assumere valori negativi⁵⁸.

Analisi empiriche hanno dimostrato un diverso comportamento della distribuzione log-normale⁵⁹ delle variazioni dei prezzi in corrispondenza delle code, cioè dove si collocano gli eventi estremi come forti guadagni o grandi crolli dei prezzi, osservando un maggiore spessore. Secondo la teoria ordinaria, la distribuzione delle variazioni dei prezzi tende a calare in modo esponenziale; l'evidenza empirica mostra, invece, che gli eventi estremi sono più probabili di quanto prescritto dalla teoria ordinaria. Ciò porta a delle conseguenze, quali: la sottostima dei rischi di possibili perdite ed un certo errore nella

⁵⁴ Si ha un'efficienza debole del mercato.

⁵⁵ L'analisi tecnica è lo studio dell'andamento dei prezzi dei mercati finanziari nel tempo, per prevederne le tendenze future, mediante l'analisi dei grafici e l'ausilio di indicatori. In senso lato è quella teoria di analisi che cerca di prevedere l'andamento futuro del prezzo di un bene quotato (reale o finanziario), studiando la sua storia passata, determinando quindi il timing giusto per entrare o uscire dal mercato.

⁵⁶ (Airoidi, 2009)

⁵⁷ Il *processo di Wiener*, detto anche *moto browniano geometrico*, è uno dei *processi di Lévy*. Consiste in un processo stocastico in tempo continuo in cui il logaritmo della quantità variabile nel tempo segue un moto browniano.

⁵⁸ Prezzi negativi sono privi di significato.

⁵⁹ La distribuzione log-normale è la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria X il cui logaritmo $\log(X)$ segue una distribuzione normale. La variabile X è una variabile aleatoria continua.

valutazione degli strumenti derivati. Ciononostante, in finanza il modello correntemente utilizzato continua ad essere quello log-normale, che verrà brevemente spiegato di seguito.

Assunzioni iniziali

Punto di partenza è l'assunto che il tasso di variazione istantaneo del titolo⁶⁰ sottostante l'opzione si distribuisca in modo normale. Per tanto, assumendo μdt la media nell'istante dt e $\sigma\sqrt{dt}$ deviazione standard nell'istante dt , è possibile scrivere:

$$[12] \quad \frac{dS}{S} \sim N(\mu dt, \sigma^2 dt)$$

dove dS è la variazione dell'azione nell'istante dt .

Descrivendo le variazioni del prezzo del sottostante in termini di logaritmo, ed applicando il lemma di Ito, si ottiene che

$$[13] \quad \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right), \sigma^2 T\right]$$

che è possibile scrivere come

$$[14] \quad \ln(S_T) - \ln(S_0) \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right), \sigma^2 T\right]$$

da cui segue che

$$[15] \quad \ln(S_T) \sim N[\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right), \sigma^2 T]$$

L'equazione [15] mostra che il logaritmo naturale di S_t , $\ln(S_t)$, si distribuisce normalmente e quindi S_t segue una distribuzione log-normale. Caratteristiche della

⁶⁰ Si ipotizza un'azione.

distribuzione log-normale sono quelle di essere asimmetrica e di perdere la proprietà di indipendenza degli incrementi⁶¹, pur rimanendo comunque un processo di Markov.

Il valore atteso del prezzo dell'azione, espresso in termini di capitalizzazione continua, è:

$$[16] \quad E(S_T) = S_0 e^{\mu T} \quad 62$$

Il termine μ rappresenta il rendimento medio atteso di S su un periodo T . L'equazione [12] mostra che il tasso di variazione atteso di S nell'istante di tempo dt è μdt . Dato che dt è molto piccolo, è facile pensare che il tasso di variazione atteso del titolo, in questo caso pari a μ ⁶³, sia uguale al tasso di rendimento annuo atteso composto continuamente, ma così non è. La spiegazione di quanto affermato è la seguente: se come precedentemente detto

$$[17] \quad S_T = S_0 e^{\eta T}$$

ne segue che il tasso di rendimento annuo composto continuamente sarà pari a

$$[18] \quad \eta = \frac{1}{T} \ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right)$$

⁶¹ cit. (Moriconi, 2008). Rappresenta il moto di un punto i cui movimenti successivi siano indipendenti.

⁶² Si prenda in considerazione un tasso di interesse annuale η , composto i volte l'anno, per T anni. L'interesse in capitalizzazione continua si determina passando dal limite di $i \rightarrow \infty$, ovvero reinvestimento continuamente quanto maturato. Per tanto il valore finale sarà dato da:

$$S_T = \lim_{i \rightarrow \infty} S_0 \left(1 + \frac{\eta}{i} \right)^{iT} = S_0 e^{\eta T}$$

⁶³ Il tasso di rendimento atteso, μ , di un titolo dipende dalla rischiosità del titolo stesso: maggiore è il rischio, maggiore sarà il rendimento atteso richiesto dall'investitore (premio per il rischio). Dipende anche dal tasso *free risk*: maggiore è il tasso privo di rischio, maggiore sarà il tasso di interesse atteso dall'investitore.

La [13] implica che il tasso di rendimento annuo, η , composto continuamente, relativo al periodo tra zero e T , si distribuisce in modo normale⁶⁴:

$$[19] \quad \eta \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right), \frac{\sigma^2}{T} \right] \quad 65$$

Ciò significa che la varianza, $\frac{\sigma^2}{T}$, è inversamente proporzionale alla lunghezza dell'intervallo di tempo; la media $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ è indipendente dalla lunghezza dell'intervallo temporale e non è pari a μ ⁶⁶, confutando quanto erroneamente assunto inizialmente.

2.3 Modello di Black-Scholes-Merton

Fischer Black (Washington, 11 Gennaio 1938 – New York, 30 Agosto 1995), **Myron Scholes** (Timmins, 1 Luglio 1941) e **Robert Merton** (New York, 31 Luglio 1944) attraverso il loro modello, pietra miliare nel prezzaggio delle opzioni, hanno influenzato il modo in cui gli operatori valutano le opzioni ed effettuano operazioni di copertura. Per questo Merton e Scholes hanno ricevuto, nel 1997, il Premio Nobel per l'economia.

La formula di Black-Scholes, comparsa in un articolo del *Journal of Political Economy* nel 1973, è la prima formula analitica per la determinazione del prezzo di non arbitraggio di un'opzione *call* o *put* di tipo europeo, che è derivata a partire dalle ipotesi sottostanti al modello, ed è ancora oggi la formula più adoperata in finanza per l'*option pricing*, nonostante i limiti relativamente alle assunzioni alla base del modello lontane dalla realtà dei mercati finanziari.

Black e Scholes sviluppano un modello per il prezzaggio delle opzioni basato sulla costruzione di un portafoglio di replica, composto da un titolo privo di rischio e dallo stesso sottostante dell'opzione nelle proporzioni tali da replicare esattamente il *pay-off*

⁶⁴ (Hull, Opzioni, Futures e Altri Derivati, 2009)

⁶⁵ Ricordando che $\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right), \sigma^2 T \right]$, allora moltiplicandolo per $\frac{1}{T}$ si ottiene la distribuzione Normale espressa dalla [19] .

⁶⁶ (Nielsen, 1992)

dell'opzione. Il valore dell'opzione, sotto l'ipotesi di assenza di arbitraggio, sarà pari esattamente al valore del portafoglio replicante se, come ipotizzato da Black e Scholes, l'investitore aggiusti continuamente le quote dei titoli in portafoglio, fino alla scadenza dell'opzione.

Parlare del modello di Black-Scholes senza soffermarci sul calcolo stocastico non darebbe una visione completa e corretta del modello stesso. Ma lo scopo di questa tesi è un altro ed in questa sede faremo direttamente riferimento alle formule ormai molto conosciute. E' interessante osservare che l'impianto teorico che sta alla base del modello di Black-Scholes è lo stesso di quello che descrive la procedura di prezzaggio delle opzioni tramite il modello binomiale. Anche affrontando il problema tramite processi stocastici continui è necessario infatti passare attraverso la costruzione di un portafoglio di replica e il principio di non arbitraggio. Quello che differenzia sostanzialmente l'approccio continuo da quello discreto è l'evoluzione del prezzo dell'attività sottostante: nel caso continuo i prezzi si muovono secondo un moto browniano geometrico.

Le assunzioni che stanno alla base del modello sono le seguenti⁶⁷:

- Il prezzo del titolo sottostante ha una distribuzione log-normale e segue le equazioni differenziali stocastiche del moto browniano geometrico⁶⁸, con μ e σ costanti;
- Sono consentite le vendite allo scoperto del sottostante, come dello strumento derivato, e non esistono restrizioni all'utilizzo dei relativi proventi;
- Non sussistono costi di transazione, tassazione, né frizioni di altro tipo nel mercato, e i titoli sono perfettamente divisibili (è possibile scambiare frazioni arbitrariamente piccole di ogni titolo sul mercato);
- Il sottostante e lo strumento derivato sono scambiati sul mercato in tempo continuo;
- Il sottostante non paga i dividendi per tutta la vita del derivato;
- Non sono ammesse opportunità d'arbitraggio: il rischio derivante dall'acquisto e vendita dei titoli può essere coperto tramite gli strumenti derivati, in questo caso

⁶⁷ (Hull, Opzioni, Futures e Altri Derivati, 2009)

⁶⁸ (Alexander, 2009)

option, andando così a costruire un portafoglio privo di rischio. Dato che gli strumenti hanno valore di mercato che è uguale per tutti gli investitori, anche il valore dell'opzione sarà lo stesso per tutti gli investitori;

- Il tasso d'interesse privo di rischio è uguale per tutte le scadenze.

Come mostra la precedente equazione [15], S_t si distribuisce in modo log-normale e può essere definito da un processo stocastico che segue un moto browniano e che soddisfa la seguente *equazione differenziale stocastica*

$$[20] \quad \frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

che possiamo riscrivere come

$$[21] \quad dS = \mu S dt + \sigma S dW$$

dove μ , detto fattore di *drift*, e σ , la volatilità, sono costanti. μdt rappresenta la parte deterministica non soggetta a incertezza, mentre σdW è la componente stocastica. Possiamo quindi scrivere che $dW = \varepsilon \sqrt{dt}$, dove ε è una variabile aleatoria che si distribuisce normalmente⁶⁹ con media nulla e varianza unitaria.⁷⁰ Applicando alla precedente equazione [20] la *formula di Itô*⁷¹ si ottiene il seguente processo

$$[22] \quad \ln(S_T) = \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T + \sigma W$$

il quale può essere espresso come trasformazione esponenziale nella forma

⁶⁹ La distribuzione normale è caratterizzata dalla seguente funzione di densità di probabilità:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dove μ è il valore atteso e σ^2 è la varianza.

⁷⁰ (Airoldi, 2009)

⁷¹ Il *processo di Itô* rappresenta una particolare tipologia di *processo di Wiener* generalizzato.

$$[23] \quad S_T = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W}$$

In tal modo i prezzi possono essere definiti da un processo stocastico che segue il moto browniano geometrico e soddisfano l'equazione differenziale stocastica [20] .

Indicando con f il prezzo di uno strumento derivato, funzione di S e t , applicando il *lemma di Itô*⁷², e sostituendo nell'equazione ottenuta la [21] , si ottiene la seguente equazione differenziale stocastica:

$$[24] \quad df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dW$$

Nelle forme discrete, la [20] e la [24] diventano rispettivamente:

$$[25] \quad \frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W$$

che equivale a scrivere

$$[26] \quad \Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta W$$

e, analogamente,

$$[27] \quad \Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta W$$

Nel lavoro originale, Black e Scholes costruiscono un portafoglio neutrale al rischio basandosi su un approccio *hedging*, ovvero creano un portafoglio composto dall'opzione ed il relativo sottostante: questo è possibile perché l'opzione ed il sottostante sono influenzati dalla stessa fonte di incertezza, quale la variabilità del valore del sottostante. In assenza di opportunità di arbitraggio, il rischio del portafoglio è reso nullo attraverso i

⁷² Il *lemma di Itô* è un'estensione dello sviluppo della *serie di Taylor* applicabile ad una funzione stocastica, la quale presenta quindi un termine dW che indica un processo di Wiener.

continui ribilanciamenti della composizione del portafoglio. Per tanto la strategia di *hedging* farà sì che il rendimento di tale portafoglio sia pari al tasso *free risk*: questa è una condizione cardine al fine di ottenere le formule di Black-Scholes. Si osserva infatti che nella [26] e nella [27] i processi di Wiener, ΔW , sono gli stessi: creando un portafoglio formato dal derivato e dal titolo sottostante, tale processo può essere eliminato.

L'emittente del derivato costruirà un portafoglio, Π , composto, da un derivato, assumendo una posizione *short* e da un quantitativo $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$ ⁷³ di sottostante in posizione *long*. Il portafoglio per tanto sarà:

$$[28] \quad \Pi = -1f + \frac{\partial f}{\partial S} S$$

Il portafoglio di copertura è privo della componente stocastica, ma non sarà sempre privo di rischio: la derivata di f rispetto a S , ovvero $\Delta = \frac{\partial f}{\partial S}$, sarà costante solo per un periodo limitato, infinitesimo, di tempo, dt . Quindi dovrà essere eseguito un ribilanciamento nelle proporzioni tra opzione e titolo sottostante al fine di mantenere il portafoglio privo di rischio. Tale ribilanciamento, in linea teorica, dovrebbe avvenire di continuo, ed avendo assunto nelle ipotesi l'assenza di costi di transazione, ciò non comporta ulteriori costi.

La variazione del valore del portafoglio nell'intervallo di tempo Δt è

$$[29] \quad \Delta \Pi = -1\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S$$

e andando a sostituire la [26] e la [27] nella [29] si ottiene

$$[30] \quad \Delta \Pi = -\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2\right) \Delta t$$

⁷³ Il Delta misura la variazione del prezzo di un'opzione in relazione alla variazione di prezzo del titolo sottostante.

Come precedentemente osservato, ΔW , ovvero la componente aleatoria, viene meno. Questo permette di avere un portafoglio privo di rischio, in accordo con l'assunzione alla base del modello di assenza di opportunità di arbitraggio⁷⁴. La variazione del valore del portafoglio $\Delta \Pi$ nell'intervallo di tempo Δt sarà quindi priva di rischio, infatti avremo:

$$[31] \quad \Delta \Pi = r \Pi \Delta t$$

dove r indica il rendimento, privo di rischio, del portafoglio.

Sostituendo la [28] e la [30] nella [31], tramite gli opportuni calcoli, si ottiene l'equazione differenziale di Black-Scholes:

$$[32] \quad rf = \frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2$$

Osservazioni:

- Dalla [32] si evince che il valore dell'opzione non dipende da μ e ciò implica che la propensione al rischio degli investitori non va ad influenzare il valore dell'opzione. In generale, la [32] è indipendente dall'atteggiamento degli investitori nei confronti del rischio: le variabili presenti non sono legate alla propensione al rischio degli investitori; l'unica variabile che non ne è indipendente è proprio μ , che però non figura nell'equazione differenziale stocastica. Questo permette di definire un concetto chiave nella valutazione dei derivati, ovvero quello di mondo neutrale al rischio⁷⁵. Per tanto è possibile fare una qualsiasi assunzione sulla propensione al rischio degli investitori, in particolare si può assumere che tutti gli investitori siano neutrali al rischio⁷⁶: in

⁷⁴ Se il portafoglio rendesse più del tasso *free risk*, gli arbitraggisti potrebbero finanziarsi vendendo titoli *free risk* ed acquistare tale portafoglio, e viceversa, ottenendo un profitto.

⁷⁵ L'assunzione di un'economia *risk neutral* permette di ovviare al problema relativo alla propensione al rischio dell'investitore, la quale non influenzerà il risultato: 'Possiamo fare qualunque assunzione circa la propensione al rischio; in particolare possiamo semplicemente assumere che tutti gli investitori siano neutrali verso il rischio.' cit. (Hull, Opzioni, Futures e Altri Derivati, 2009)

⁷⁶ Un investitore neutrale al rischio ha una funzione di utilità lineare: l'utilità del valore atteso della lotteria è pari all'utilità attesa. L'investitore è indifferente tra un guadagno certo e la partecipazione alla lotteria.

questo modo il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli eguaglia il tasso *free risk* ed i flussi di cassa futuri attesi potranno essere attualizzati al tasso privo di rischio, semplificando l'analisi del valore dei derivati⁷⁷;

- L'equazione [32] è funzione del *theta*, *delta* e *gamma*.

La [32] è valida per valutare un generico derivato il cui prezzo dipenda dalle condizioni al contorno (*boundary conditions*), in funzione unicamente di S e t : la definizione di condizioni al contorno alternative consente di prezzare i diversi strumenti derivati. In particolar modo, nel caso di un'opzione *call* europea, la condizione al contorno è che a scadenza il valore dell'opzione sarà pari al valore massimo tra zero e la differenza tra il valore del sottostante ed il prezzo di esercizio:

$$[33] \quad f = \max(S - K, 0)$$

Applicando il principio di valutazione neutrale verso il rischio è possibile ricavare le formule di valutazione di opzioni *call* e *put* di tipo europeo il cui sottostante non paga dividendi. Nella fattispecie, in un mondo *risk neutral*, il valore attuale della *call* si ottiene attualizzandone il valore atteso al tasso *risk-free*:

$$[34] \quad call = \hat{E}[\max(S_T - K, 0)]e^{-rT} \quad 78$$

Per tanto sotto la condizione della [34], l'equazione differenziale stocastica di Black-Scholes ha la seguente soluzione esplicita:

Per tanto non richiede un rendimento aggiuntivo, quale il premio per il rischio, per sopportare un rischio maggiore.

⁷⁷ Si tenga presente che l'assunzione di neutralità al rischio è solo un espediente per l'equazione differenziale di Black-Scholes. Ipotizzando un mondo in cui gli investitori siano avversi al rischio, il tasso di rendimento atteso del titolo sottostante, così come il tasso di attualizzazione dei valori attesi, cambierebbero, ma i due effetti si andrebbero a compensare tra di loro. (Hull, Opzioni, Futures e Altri Derivati, 2009)

⁷⁸ Si ricordi quanto precedentemente detto in riferimento alla capitalizzazione continua.

$$[35] \quad call = S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2) \quad ^{79}$$

dove⁸⁰

$$[36] \quad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$[37] \quad d_2^{81} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Analogamente per un'opzione *put* la formula è:

$$[38] \quad put = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Osservazioni:

- Tali formule forniscono il prezzo di non arbitraggio di una *call* e di una *put* europee in ogni istante, dalla data della stipula fino alla scadenza;

⁷⁹ Come precedentemente detto, in questa tesi non ci addentriamo nelle derivazioni analitiche delle formule, ma ci proponiamo solo di riportarle nella loro forma finale.

⁸⁰ Nel caso di un tempo generico t possiamo scrivere la [36] e la [37] rispettivamente come

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

⁸¹ Per definire la d_2 , si ricorre alla standardizzazione della variabile $\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$ al fine di ottenere una variabile

aleatoria $Z = \frac{\ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ che segue la distribuzione normale. Definendo $d_2 = -\frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

allora nel caso in cui $S_T \geq K$, ovvero $Z \geq -d_2$, ha una probabilità di verificarsi pari a $1 - N(-d_2) = N(d_2)$. $N(X)$ è la funzione cumulata di una distribuzione normale standardizzata (detta anche funzione di ripartizione), ed è la probabilità associata ad una variabile aleatoria normale standardizzata, X , di assumere un valore inferiore a x . Ha media nulla e deviazione standard pari ad uno.

- Dato che non esiste una primitiva della normale standardizzata, per il calcolo di tale funzione si ricorre alle tavole attuariali che, con l'utilizzo dell'interpolazione, forniscono la funzione di distribuzione cumulata per la normale standardizzata. Un metodo di calcolo alternativo è l'approssimazione polinomiale, oltre ovviamente tramite i software di calcolo;
- Si tenga presente anche che la [35] e la [38], nel caso di opzioni che non pagano dividendi, possono essere utilizzate per la valutazione, rispettivamente, di opzioni *call* e *put* americane. In dettaglio, se si è a conoscenza della data di stacco del dividendo è possibile applicare il modello di Black-Scholes ipotizzando che l'opzione scada un attimo prima dello stacco del dividendo e stimando il valore dell'opzione europea che abbia scadenza nello stesso momento;
- Quelle indicate dalla [35] e [38] sono le formule per determinare il prezzo teorico dell'opzione in assenza di opportunità di arbitraggio. Se il valore dell'opzione non dovesse soddisfare la [32], potrebbero esserci delle opportunità di arbitraggio: nel caso in cui il valore del portafoglio fosse superiore al valore di mercato dell'opzione, l'investitore potrebbe realizzare un arbitraggio vendendo il portafoglio ed acquistando l'opzione.

2.3.1 La volatilità nel modello di Black-Scholes

Le formule di Black-Scholes ricavate nel paragrafo precedente dipendono da S il prezzo del sottostante, il prezzo di esercizio K , il tasso free risk r , la durata residua dell'opzione T e la volatilità del prezzo del sottostante σ . Tra i parametri l'unico che non è possibile osservare direttamente, in quanto non quotato sui mercati, è la volatilità del sottostante. Questa può essere stimata sulla base delle serie storiche dei tassi di variazione del sottostante, per cui ponendo

$$[39] \quad u_i = \ln\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right)$$

la stima s della deviazione standard di u_i si ottiene come

$$[40] \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (u_i - \bar{u})^2}$$

dove \bar{u} rappresenta la media delle u_i . Trattandosi di una stima, poiché non è nota la media dell'intera popolazione, ma solo un campione, si utilizza $N - 1$ al fine di ottenere uno stimatore corretto. Essendo, quindi, s una stima di $\sigma\sqrt{T}$ ⁸², ne segue che la deviazione standard può essere stimata come $\sigma = \frac{s}{\sqrt{T}}$. L'errore standard, cioè la stima della variabilità dello stimatore o in altre parole la misura della sua imprecisione, è $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$.⁸³

2.3.1.1 Volatilità implicita

Le formule di Black-Scholes sono altresì utilizzate per determinare quella che viene chiamata la volatilità implicita delle opzioni: sono utilizzate in modo inverso per calcolare la volatilità dato il prezzo delle opzioni.

Difatti esistono due tipologie di volatilità, la volatilità storica e la volatilità implicita:

- La volatilità storica è la volatilità osservata in un certo periodo di tempo. Viene calcolato attraverso la deviazione standard sulla serie storica dei prezzi in esame, generalmente un anno sulla base delle serie storiche giornaliere⁸⁴, e rappresenta l'ampiezza media delle fluttuazioni fatte registrare dal prezzo del titolo sottostante intorno al valore medio. La volatilità storica fornisce informazioni sul passato, stimando la variabilità passata;
- La volatilità implicita è un parametro utilizzato nel prezzaggio delle opzioni, implicito nel prezzo dell'opzione e quindi, non essendo estratta dalla serie storica del sottostante, assume valori quasi certamente differenti rispetto alla volatilità del sottostante. Tale misura è intesa come la sintesi delle previsioni circa l'ampiezza e la frequenza delle future fluttuazioni del prezzo del titolo sottostante⁸⁵, le quali sono influenzate dalla domanda e dall'offerta del titolo

⁸² T è la durata residua dell'opzione espresso in anni.

⁸³ (Hull, Opzioni, Futures e Altri Derivati, 2009)

⁸⁴ (Cartei, Quirici, Bellandi, & Lazzeretti, 2010)

⁸⁵ (Cartei, Quirici, Bellandi, & Lazzeretti, 2010)

sottostante e dalle aspettative di mercato circa la direzione del prezzo. In sostanza, dunque, riflette le aspettative che il mercato ha sulla probabilità che l'opzione venga esercitata: come già argomentato nel paragrafo 1.6.4, se le aspettative riguardano un aumento delle fluttuazioni del sottostante, cresce la probabilità che l'opzione scada *in the money* e quindi che venga esercitata; di conseguenza la volatilità implicita aumenta e determina un aumento del premio dell'opzione. Viceversa, se le previsioni sono di bassa fluttuazione del prezzo del sottostante, la probabilità che l'opzione venga esercitata è bassa; la volatilità implicita diminuisce e quindi anche il premio dell'opzione. Ciò si dimostra attraverso il calcolo del *vega*, ovvero derivando il valore dell'opzione rispetto alla volatilità implicita, qui indicata con σ_I :

$$[41] \quad vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma_I} = S_t e^{-\frac{d_1^2}{2}} \sqrt{\frac{T-t}{2\pi}} > 0$$

essendo S_t e $\sqrt{T-t}$ sempre maggiore di zero, il prezzo dell'opzione è crescente all'aumentare della volatilità implicita, confermando quanto precedentemente detto. Analogamente è possibile dimostrare che lo stesso risultato vale anche per un'opzione *put*.⁸⁶

La volatilità implicita è così definita in quanto si deriva dalla formula per il calcolo teorico del valore dell'opzione: se si osserva un prezzo di equilibrio di mercato di un'opzione, può essere ricavata invertendo la formula di Black-Scholes. E', per tanto, quel valore di σ che permette di eguagliare il premio teorico dell'opzione definito dal modello di Black-Scholes al premio di mercato:

$$[42] \quad call - (S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)) = 0$$

Dato che le formule di Black-Scholes non sono lineari, non possono essere invertite analiticamente, per tanto la volatilità può essere stimata con un processo iterativo facilmente applicabile attraverso dei software di calcolo, fino ad ottenere il valore con il

⁸⁶ (Minenna)

grado di accuratezza desiderato, o attraverso l'algoritmo di ricerca binomiale⁸⁷, oppure con opportune metodologie statistiche utilizzando i dati che provengono dall'analisi delle serie storiche, e quindi la correttezza di una qualunque formula di prezzaggio finisce col dipendere dalla corretta stima della volatilità.

L'investitore che vuole investire in opzioni e ha la possibilità di scegliere tra più opzioni sullo stesso sottostante, simili per *strike price* e scadenza, può efficacemente comparare le diverse opzioni grazie alla volatilità implicita che permette di valutare il costo di un'opzione al netto delle sue caratteristiche strutturali (per l'appunto *strike price* e scadenza).⁸⁸

Molti studi hanno provato che la volatilità implicita è una previsione molto accurata della volatilità futura, permettendo di raggiungere dei risultati previsionali migliori di alcuni modelli econometrici che predicono la volatilità. In questo senso, la combinazione di un mercato attivo delle opzioni accoppiato alla formula di Black-Scholes rivela nuove informazioni all'economia⁸⁹: per tramite della volatilità storica e della volatilità implicita gli operatori riescono ad avere informazioni utili, continue ed affidabili, sulle aspettative circa la volatilità futura del prezzo del sottostante. Difatti uno dei metodi per interpretare il *sentiment* di mercato è quello di confrontare la volatilità storica con la volatilità implicita. L'idea che sta alla base è quella di legare la volatilità futura all'andamento dei prezzi futuri: normalmente, soprattutto per gli indici azionari, la correlazione tra volatilità e prezzi è negativa e, quindi, si può partire dall'ipotesi che un aumento della volatilità si rifletta in un ribasso dei prezzi, e viceversa. Il ragionamento vale meno osservando gli stessi valori per i singoli titoli azionari: per questi ultimi un rialzo atteso della volatilità potrebbe essere legato anche da un'attesa rialzista dei prezzi del sottostante. E' facile osservare che su alcuni sottostanti azionari la correlazione tra volatilità e prezzi è largamente positiva.⁹⁰

Osservazioni:

⁸⁷ (Minenna)

⁸⁸ cit. (Minenna)

⁸⁹ (Shah, 1997)

⁹⁰ (Zanchetta, 2012)

- dato il prezzo di un'opzione, il valore della volatilità implicita è unico, e i traders applicano le loro analisi per definire le migliori strategie;⁹¹
- la volatilità implicita rimane unica nel prezzo di un'opzione al variare del tasso di interesse e del dividendo;⁹²
- la vita residua dell'opzione (o tempo alla scadenza), lo *strike price*, i tassi di interesse e i dividendi influenzano il prezzo dell'opzione indipendentemente dalla volatilità.

2.3.2 Esplicazione delle formule di Black-Scholes: I fattori $N(d_1)$ e $N(d_2)$ ⁹³

E' utile fornire una breve spiegazione dei fattori $N(d_1)$ e $N(d_2)$ presenti nelle formule di Black-Scholes. Osservando attentamente la [35], il valore di emissione di un'opzione *call* è replicato da un portafoglio composto da una componente non rischiosa, rappresentata dal valore di un *bond* privo di rischio il cui valore di rimborso è pari al valore dello *strike price* dell'opzione, e da una componente rischiosa quale l'attività sottostante. Dato che il portafoglio è stato finanziato con debito, in termini finanziari il segno meno nella formula sta a significare che tale debito dovrà essere rimborsato a scadenza. Ecco quindi che a scadenza il valore del portafoglio sarà dato dal valore delle azioni detenute al netto del debito da rimborsare.

Ai fini della spiegazione occorre introdurre il concetto di *risk neutral probabilities* che permette di attualizzare tutte le attività finanziarie al medesimo tasso *free risk*. Per rendere adeguata l'attualizzazione a tale tasso, è necessario aggiustare (ecco perché si parla anche di *risk adjusted probabilities*) le probabilità in modo che tutte le attività finanziarie abbiano un rendimento pari al tasso privo di rischio. L'utilizzo di probabilità aggiustate per il rischio, anche dette 'pseudo probabilità', permette di aggirare il problema della stima del premio per il rischio proprio perché non si prende in considerazione il rischio effettivo dell'azione né l'avversione al rischio degli investitori. Ciò permette di semplificare i calcoli assumendo un mondo di investitori neutrali al rischio.

⁹¹ (Minenna)

⁹² (Minenna)

⁹³ (Nielsen, 1992)

Dividiamo il portafoglio di replica nelle due componenti sopra citate:

- la prima componente rappresenta lo *strike price* da pagare a scadenza nel caso in cui si eserciti l'opzione. L'esercizio dell'opzione avverrà nel caso in cui il valore del sottostante sia maggiore del prezzo di esercizio, per tanto il valore atteso sarà dato dal prodotto tra lo *strike price* e la probabilità che il prezzo dell'azione sia maggiore del prezzo di esercizio: $-Kp\{S_T > K\}$. Sulla base dell'ipotesi di valutazione neutrale verso il rischio, il valore atteso può essere attualizzato ad oggi al tasso *free risk*, per cui $-Ke^{-rT}p\{S_T > K\}$. Osservando l'equazione [35] risulta chiaro che $p\{S_T > K\} = N(d_2)$, e quindi $N(d_2)$ è la probabilità aggiustata per il rischio che l'opzione scada *in the money*;
- la seconda componente è il possibile valore attuale della quota di azioni detenute in portafoglio, $SN(d_1)$. $N(d_1)$ è lo *hedge ratio*⁹⁴ nel modello di Black-Scholes, ovvero il *delta* di cui abbiamo parlato nel paragrafo 1.6.4.3. Risulta adesso chiaro che al fine di ribilanciare il portafoglio, occorre andare a modificarne il *delta*.

Il portafoglio di replica quindi permette non solo di prezzare lo strumento derivato, ma anche di costruire una strategia tale da replicarne il valore: in un mercato completo, in assenza di opportunità di arbitraggio, il valore dello strumento derivato è replicabile da un portafoglio sì fatto. In questo modo chi emette il derivato potrà sempre onorare il contratto a scadenza attraverso la costruzione un portafoglio di pari valore.

2.3.3 Riflessioni e critiche sul modello di Black-Scholes

Volendo sottoporre ad analisi critica il modello di Black-Scholes per il prezzaggio di un'opzione, dobbiamo considerare le assunzioni che ne stanno alla base.

Boyle ed **Emanuel** nella loro opera intitolata *Discretely adjusted option hedges* analizzano la distribuzione dei rendimenti relativamente ad un portafoglio di copertura che viene ribilanciato ad intervalli di tempo discreti. Per far questo i due autori costruiscono un portafoglio di copertura ipotizzando un mondo in cui valgono con

⁹⁴ Si definisce *hedge ratio* la quantità di sottostante detenuta nel portafoglio di copertura.

certezza le assunzioni del modello di Black-Scholes. I rendimenti di tale portafoglio vengono espressi attraverso il prodotto di tre componenti: una funzione delle variabili sottostanti valutate al momento della costruzione del portafoglio; una variabile casuale estratta dalla distribuzione *chi-quadro*⁹⁵ traslata in modo da avere una media pari a zero con un grado di libertà; l'intervallo di tempo tra un aggiustamento e l'altro. I rendimenti dei titoli sono stati generati in accordo alla distribuzione log-normale; le negoziazioni sono state effettuate sulla base del valore teorico del sottostante, per mezzo della simulazione Monte Carlo. Le differenze di valore col portafoglio di copertura sono state reinvestite in titoli non rischiosi. Tale valore in media tende a zero ed ogni deviazione dal valore medio è legato al processo di copertura effettuato in tempi discreti. Ciò che osservano i due autori è che i rendimenti del portafoglio non sono correlati con i rendimenti di mercato, ma non sono tra loro indipendenti. Rimane comunque una correlazione tra i titoli presenti in portafoglio: infatti un'errata valutazione della variazione dell'andamento del sottostante influisce sulle componenti del portafoglio di replica. Per tanto tale copertura riduce i rischi, ma non li elimina del tutto. Dalle analisi empiriche osservano che la distribuzione dei rendimenti del sottostante è troppo leptocurtica⁹⁶ per essere normalmente distribuita (così come ipotizzato da Black e Scholes): la determinazione del rischio in termini di *Value at Risk* conduce ad una sottostima per elevati intervalli di confidenza e una sovrastima per livelli di confidenza più contenuti. Un'alternativa potrebbe essere quella di estrarre i rendimenti del sottostante da una distribuzione *t-Student* con cinque gradi di libertà, che dovrebbe effettivamente implicare una distribuzione log-normale del sottostante nel lungo periodo.

Black e Scholes assumono nel loro modello una volatilità costante e un andamento non discontinuo del sottostante. La formula di Black-Scholes dipende dalla volatilità, un parametro non direttamente osservabile, ma di fatto viene utilizzata dal mercato per ricavare, partendo dalle quotazioni di mercato delle opzioni, il valore di volatilità che dovrebbe avere il sottostante per produrre il prezzo osservato. Come argomentato nel

⁹⁵ E' una distribuzione di probabilità che rappresenta la somma dei quadrati di variabili aleatorie indipendenti che seguono una distribuzione normale standard.

⁹⁶ Una distribuzione leptocurtica presenta una curtosi maggiore di 0, ovvero i valori della distribuzione si concentrano maggiormente intorno alla sua media. Si dice anche che la distribuzione ha una forma 'allungata'.

paragrafo 2.3.1, si inverte l'equazione di Black-Scholes per ricavare la volatilità, che prende il nome di volatilità implicita. Il modello di Black-Scholes, basandosi sulle assunzioni di log-normalità per le oscillazioni del sottostante e di distribuzione normale dei rendimenti del titolo sottostante, implica che tutte le opzioni dello stesso tipo, scritte sullo stesso sottostante, con stessa scadenza, abbiano lo stesso livello di volatilità implicita, quale che sia il prezzo di esercizio. Se così fosse, la volatilità dovrebbe essere indipendente dallo *strike price*.⁹⁷ Nella realtà la volatilità implicita, espressa in funzione del prezzo di esercizio, dà origine ad un fenomeno noto nei mercati finanziari detto *volatility smile*⁹⁸, così chiamato proprio perché graficamente ricorda la forma di un sorriso, ovvero assume la forma a U, e ha il valore minimo in caso di opzioni *at the money*, mentre cresce nel caso di opzioni *in* e *out of the money*. Si osserva che opzioni con *strike price* diversi hanno livelli di volatilità implicita differenti. Tale fenomeno si manifesta quando le opzioni *call* e *put*, *in the money* e *out of the money*, in particolare le opzioni *deep in the money* e *deep out of the money*, mostrano una volatilità implicita più elevata rispetto alle opzioni *call* e *put at the money*. Questo dimostra come il modello di Black-Scholes, in alcuni casi, non sia sufficientemente predittivo, soprattutto quando il prezzo di esercizio si discosta molto dal prezzo del sottostante al momento della valutazione. Si osservano quindi delle differenze tra il valore delle opzioni secondo il modello di Black-Scholes ed i prezzi di mercato delle opzioni europee. Per questo aspetto il modello di Black-Scholes potrebbe essere considerato come un'approssimazione locale, in quanto le volatilità cambiano di giorno in giorno e di opzione in opzione.⁹⁹

La diretta conseguenza di una strategia dinamica di copertura è l'impatto sull'ammontare dei costi di transazione. Come argomentato nei capitoli precedenti, Black e Scholes

⁹⁷ (Airoldi, 2009)

⁹⁸ Alcuni traders, invece di definire il *volatility smile* in funzione del prezzo di esercizio, lo definiscono come segue:

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \ln \left(\frac{K}{F_0} \right)$$

dove F_0 è il prezzo del *forward* sottostante. In questo modo il *volatility smile* dipende meno dalla vita residua dell'opzione, T . (Hull, Risk management e istituzioni finanziarie, 2008)

⁹⁹ (Maienza, 2007)

affermano che è possibile replicare il valore di un'opzione mediante la costruzione di un portafoglio di replica. Tale portafoglio dovrà essere continuamente ribilanciato al fine di replicare esattamente il *pay-off* dell'opzione. Una delle ipotesi forte alla base del modello Black-Scholes è l'assenza di costi di transazione, che nella realtà, invece, sono presenti. Molti autori riconoscono che il ribilanciamento continuo in presenza di costi di transazione è una strategia di replica irrealistica. Il prezzo del sottostante muovendosi secondo un moto browniano comporta una spesa ingente in quanto ricalibrare continuamente il portafoglio per compensare tali movimenti determina dei costi di transazione elevatissimi, tanto da rendere, economicamente parlando, il continuo ribilanciamento non conveniente. C'è un *trade off* tra rinegoziare i titoli in portafoglio quanto più spesso possibile ed i costi di transazione: è infatti impossibile ricalibrare spesso il portafoglio e minimizzare i costi di transazione. Non solo, ma l'ipotesi di continuo ribilanciamento del portafoglio di replica trova difficile applicazione nella realtà: oggettivamente, risulta impossibile, per ovvi motivi pratici, negoziare continuamente titoli sul mercato, e quindi la ricalibrazione del portafoglio avverrà inevitabilmente a determinati intervalli di tempo.

Le strategie di copertura che si mostrano robuste se applicate di continuo, non riescono a raggiungere altrettanto successo se applicate ad intervalli di tempo discreti. Conseguentemente una discretizzazione della strategia di replica adottata da Black e Scholes, o in altri termini ricalibrare non continuamente, ma ad intervalli di tempo discreti, comporta che il portafoglio di replica non sia più privo di rischio. Inoltre determina sì una riduzione dei costi di transazione della strategia di replica, ma allo stesso tempo genera degli errori di copertura, chiamati *hedging errors*. Questi sono dovuti ad una non perfetta replica del portafoglio e sono misurati, ad ogni intervallo di negoziazione (*hedging periods*), dalla differenza tra il valore del portafoglio di copertura ed il valore dell'opzione. E' agevole, dunque, intuire che la presenza dei costi di transazione fa sì che decada anche l'assunto che sia valido il principio di non arbitraggio. Black e Scholes sostengono, inoltre, che tali errori non sono correlati col mercato e possono, quindi, non essere presi in considerazione aumentando la frequenza di revisione del portafoglio. Tale argomentazione, però, non è del tutto corretta: gli *hedging errors* diminuiscono all'aumentare della frequenza di negoziazione del portafoglio, ma ciò comporta un

aumento dei costi di transazione, rendendo quindi molto costoso ricercare un elevato grado di accuratezza nella replica del valore dell'opzione¹⁰⁰.

Nonostante, però, il modello di Black-Scholes sia distante dalla realtà dei mercati, i *traders* continuano ad utilizzarlo perché facilmente comprensibile ed implementabile.

¹⁰⁰ Black e Scholes suggeriscono che l'incertezza derivante da una non continua ricalibrazione può essere ridotta diversificando il portafoglio con più opzioni differenti. (Phelim P. Boyle, 1980)

3 Strategie di replica alternative

3.1 Costi di transazione

Dal precedente capitolo, si evince che elemento cruciale da considerare nel costruire una strategia dinamica di replica del valore dell'opzione è la presenza dei costi di transazione. Questi fanno sì che la strategia di *hedging* sia tanto più costosa quanto maggiore è la frequenza delle negoziazioni dei titoli in portafoglio.

Ci soffermiamo ora brevemente sui costi di transazione. In ambito economico-finanziario i costi di transazione rappresentano degli oneri che devono sostenere gli operatori che partecipano allo scambio. Tali oneri possono avere varia natura: costi legali, costi di contrattazione, costi per la ricerca di una controparte. In particolare ci riferiamo ai costi sostenuti dagli investitori per acquistare e vendere gli strumenti finanziari, che rappresentano le commissioni (*fee*) che ricevono gli intermediari finanziari per il servizio di negoziazione offerto. La modalità di calcolo dei costi di transazione viene stabilita contrattualmente in modo differente a seconda della tipologia di cliente: generalmente la clientela *retail* (al dettaglio) ha delle commissioni che decrescono all'aumentare dell'ammontare delle transazioni; i clienti professionali pagano una commissione di tipo *flat*, indipendentemente dall'ammontare delle transazioni.¹⁰¹

3.2 Normativa sui costi di transazione

La disciplina attualmente in vigore relativamente alle imposte sulle transazioni finanziarie, fa riferimento alla Legge n. 228/2012 e al rispettivo Decreto attuativo del 21 Febbraio 2013. La tassa colpisce le transazioni di azioni e strumenti finanziari partecipativi relativamente alle società che, residenti nel territorio dello Stato, hanno una capitalizzazione di almeno 500 milioni di euro, ed i titoli derivati. Secondo l'art. 17 del Decreto, la Consob dovrà indicare al Ministero delle Economie e delle Finanze, entro il 10 Dicembre di ogni anno, le società che hanno una capitalizzazione media inferiore al suddetto limite, le azioni delle quali saranno per tanto escluse dall'applicazione dell'aliquota al momento della transazione. Per le azioni la tassazione sarà pagata solo

¹⁰¹ (Toft, 1994)

dall'acquirente, mentre per i derivati la tassa è dovuta da entrambe le controparti della transazione. L'art. 4 stabilisce che *‘Il valore della transazione di cui al comma 491 - della Legge del 24/12/2012 n. 228 - è determinato sulla base del saldo netto delle transazioni giornaliere, calcolato per ciascun soggetto passivo con riferimento al numero di titoli oggetto delle transazioni regolate nella stessa giornata e relative allo stesso strumento finanziario.’* L'aliquota da applicare alle transazioni è sancita dal comma 1 dell'art. 6 del suddetto Decreto: *‘L'aliquota di imposta per i trasferimenti di proprietà di cui al comma 491 è pari allo 0,2 per cento del valore della transazione ed è ridotta alla metà per i trasferimenti che avvengono a seguito di operazioni concluse in mercati regolamentati o sistemi multilaterali di negoziazione.’* A titolo meramente esemplificativo, se si acquistano 1000 euro di azioni ed entro fine giornata se ne rivendono per 800 euro, la tassa si applica solo ai 200 euro che sono il saldo positivo di fine giornata: $200 \times 0,1\% = 0,2$ euro.

Gli investitori che aprono e chiudono le proprie posizioni nell'arco della stessa giornata saranno esenti da tale tassazione. E' previsto, inoltre, un meccanismo che colpisce il trading ad alta frequenza (*high frequency trading*). Con riferimento all'art. 13 *‘L'imposta è calcolata giornalmente ed è dovuta qualora il rapporto, nella singola giornata di negoziazione, tra la somma degli ordini cancellati e degli ordini modificati, e la somma degli ordini immessi e degli ordini modificati, sia superiore al 60 per cento, con riferimento ai singoli strumenti finanziari. [...] L'imposta si applica, per singola giornata di negoziazione, sul valore degli ordini modificati e cancellati che eccedono la soglia del 60 per cento.’* Sono, dunque, esenti dall'applicazione dell'imposta le operazioni *intraday*, il trasferimento di proprietà per successione o donazione, i trasferimenti di proprietà di azioni di nuova emissione, le azioni provenienti dall'esercizio del diritto di opzione, l'assegnazione di azioni di nuova emissione dai piani di *stock option*¹⁰², le obbligazioni, i titoli di Stato, le azioni estere, le materie prime, le valute, le polizze, le quote di fondi comune di investimento, le azioni di Sicav, le quote degli Etf. Non sono soggetti alla tassazione i *market maker*, gli enti previdenziali per le forme di previdenza obbligatoria e complementare, nonché le operazioni e servizi finanziari qualificati come etici.

¹⁰² Con i piani di *stock option* si concede ai dipendenti di un'azienda il diritto ad acquistare azioni della stessa società o di un'altra azienda facente parte dello stesso gruppo, ad un prezzo predeterminato. (Borsa Italiana, Stock Option)

3.3 Time based approach

Le suddette critiche al modello di Black-Scholes hanno portato, nel corso degli anni successivi alla sua pubblicazione, alla diffusione di modelli alternativi di replica del valore delle opzioni. Focalizzandoci sulla presenza dei costi di transazione che impattano sull'effettivo costo per la realizzazione di una strategia di replica, una delle metodologie più semplici da applicare è quella di ricalibrare il portafoglio ad intervalli di tempo prestabiliti: tale modello consiste nell'implementare una strategia di copertura in accordo con quanto affermato da Black e Scholes, ma provvedendo a ribilanciare le quote in portafoglio ad intervalli di tempo discreti prefissati. Ad ogni intervallo temporale viene acquistato o venduto un certo quantitativo del sottostante presente nel portafoglio in modo da ripristinare la copertura.

3.3.1 Il modello di Leland¹⁰³

Al fine di considerare i costi di transazione in un strategia di replica, l'idea potrebbe essere quella di aumentare il costo iniziale dell'opzione di un certo ammontare di valore che rifletta i costi di transazione attesi. Tale soluzione, però, è criticabile secondo **Hayne E. Leland** per i seguenti motivi: i costi di transazione sono difficilmente computabili; sono correlati con l'andamento del prezzo del sottostante (che ricordiamo si muove secondo un moto browniano); aumentano largamente al diminuire dell'ampiezza degli intervalli temporali; in contrasto con quanto sostenuto dalla teoria in assenza di costi di transazione, l'accuratezza della copertura non aumenterebbe con il tendere a zero dell'ampiezza degli intervalli temporali.¹⁰⁴ Di conseguenza è difficile stabilire tale ammontare iniziale da sommare al valore dell'opzione.

Nel 1985, Leland sviluppa una strategia alternativa di replica ad intervalli di tempo discreti, in modo da tener conto dei costi di transazione. Tale modello risulta interessante perché è implementato direttamente partendo dalle formule di Black-Scholes [35] alle

¹⁰³ (Toft, 1994)

¹⁰⁴ (Leland, 1985)

quali si applica una volatilità aggiustata, $\bar{\sigma}^2$. La *hedging volatility*, nel caso di una posizione *short* della *call*, è così calcolata:

$$[39] \quad \bar{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[1 + \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} k}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right]^{105}$$

Com'è facilmente osservabile dalla [39], la *hedging volatility* dipende: dai costi di transazione, k , assunti come proporzionali, secondo una percentuale costante¹⁰⁶, al valore del sottostante, e dalla lunghezza degli intervalli di ribilanciamento del portafoglio, Δt . Incorporare i costi di transazione nei movimenti di prezzo del sottostante implica un aumento della volatilità: in questo modo il premio dell'opzione sarà più elevato rispetto a quello misurabile in assenza di costi di transazione. L'emittente, quindi, vende l'opzione ad un prezzo più elevato in modo da compensare i costi di transazione generati dalla negoziazione dei titoli per ricalibrare il portafoglio di replica. Il valore dell'opzione sarà, per tanto, pari al costo del portafoglio di replica sommato ai costi di transazione. La diminuzione arbitraria dei costi di transazione determina invece una riduzione della *hedging volatility*, facendola tendere alla volatilità del sottostante, σ , e per tanto la strategia si avvicinerà al modello di Black-Scholes. In questo caso la *hedging volatility* è più bassa e di conseguenza il valore dell'opzione è minore.

Dato che ci troviamo nel caso in cui un soggetto assuma una posizione *short* sull'opzione *call*, l'aumento della volatilità porta alla diminuzione del *gamma* dell'opzione. Infatti definendo il *gamma* nella sua forma esplicita:

¹⁰⁵ La [39] deriva dalla seguente equazione:

$$\bar{\sigma}^2 = \sigma^2 \left[1 + \frac{E \left| \frac{\Delta S}{S} \right|}{\sigma \sqrt{\Delta t}} \right]$$

dove $E \left| \frac{\Delta S}{S} \right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \sqrt{\Delta t}$ è normalmente distribuito. (Leland, 1985)

¹⁰⁶ Leland afferma anche che lo stesso risultato si ottiene quando il livello dei costi di transazione è pari a $\frac{k}{\sqrt{n}}$, dove n è il numero di intervalli di revisione fino a scadenza.

$$[40] \quad \bar{\Gamma}_{t_m} = \frac{1}{S_{t_m} \bar{\sigma} \sqrt{2\pi(T-t_m)}} e^{-\frac{1}{2}(d_1^2)}$$

si ha che il *gamma* diminuisce all'aumentare della volatilità. Ciò determina una minore sensibilità del *delta* dell'opzione alle variazioni del sottostante che, conseguentemente, permette di ridurre i costi di transazione.

L'utilizzo di una volatilità aggiustata, quindi, rappresenta un primo passo in avanti ad alcune criticità del modello di Black-Scholes: permette di ottimizzare la strategia di copertura illustrata da Black-Scholes in presenza di costi di transazione e di ovviare all'assunzione di una volatilità costante.

Al fine di determinare la *hedging volatility*, per prima cosa l'autore procede a determinare gli *hedging errors*, $HE_{t_{m+1}}$, relativamente al termine di un generico intervallo temporale, t_{m+1} , prima della scadenza dell'opzione, $m = 0, \dots, M - 1$, il cui ammontare è dato dalla differenza tra il valore del portafoglio di replica al tempo t_{m+1} ed il valore della *call* al tempo t_{m+1} :

$$[41] \quad HE_{t_{m+1}} = \bar{P}_{t_{m+1}} - \overline{Call}_{t_{m+1}}$$

che espresso in forma esplicita è

$$[42] \quad HE_{t_{m+1}} = S_{t_{m+1}} \bar{\Delta}_{t_m} - K e^{-r(T-t_{m+1})} \bar{N}_{t_m}(d_2) - \overline{Call}_{t_{m+1}} \quad ^{107}$$

dove Δ_{t_m} , che rappresenta la quota del titolo sottostante presente nel portafoglio detenuta durante l'intervallo temporale da t_m a t_{m+1} , è uguale a $N_{t_m}(d_1)$. Spiegato in altri termini, l'investitore ha acquistato il portafoglio di replica a t_m composto rispettivamente dal titolo sottostante, nella quota Δ_{t_m} , e dal titolo *free-risk*. Al termine del periodo, cioè a t_{m+1} , le quote dei titoli in portafoglio non sono cambiate dal tempo t_m , ma il valore del sottostante è variato determinando quindi un valore del portafoglio diverso dal valore della

¹⁰⁷ I termini sopra-barrati stanno ad indicare che è stata utilizzata la *hedging volatility*, $\bar{\sigma}^2$.

call a t_{m+1} . Sarà dunque necessario ribilanciare il portafoglio, rinegoziando la quota del sottostante, al fine di eguagliare il valore del portafoglio al valore della *call*.

Dato che l'investitore che intende attuare una strategia di replica non conosce il prezzo del sottostante a t_{m+1} , si esprime la [42] come valore atteso dello *hedging error* sulla base del prezzo del sottostante all'inizio del periodo, ovvero S_{t_m} . Ricordando la [16], infatti, si ha che $S_{t_{m+1}} = S_{t_m} e^{-\mu(t_{m+1}-t_m)}$ e dunque

$$[43] \quad E(HE_{t_{m+1}}|S_{t_m}) = S_{t_m} e^{-\mu(t_{m+1}-t_m)} [\bar{\Delta}_{t_m} - \bar{N}_{t_{m+1}}(d1)] \\ - K e^{-r(T-t_{m+1})} [\bar{N}_{t_m}(d2) - \bar{N}_{t_{m+1}}(d2)]$$

Osservando attentamente la [43] è intuibile la somiglianza con la formula di Black-Scholes: i valori all'interno delle due parentesi quadre rappresentano la variazione della componente rischiosa, la prima, e priva di rischio, la seconda, del portafoglio al termine dell'intervallo temporale. Considerazioni analoghe possono essere fatte nel caso in cui l'emittente di un'opzione, *call* in questo caso, sia interessato a conoscere gli *hedging errors* dei periodi futuri, il quale, però, al momento dell'emissione a t_0 , non ha informazioni circa l'evoluzione del prezzo sottostante e conosce solo S_{t_0} . Applicando la Legge delle aspettative iterate¹⁰⁸ alla [43], il valore atteso a t_0 del *hedging error* a t_{m+1} è dato da

¹⁰⁸ La Legge delle aspettative iterate dice: la media di Y è la media ponderata delle aspettative condizionate di Y data X , con pesi dati dalla distribuzione di probabilità di X . Analiticamente, se X assume i valori x_1, \dots, x_l , allora applicando la distribuzione condizionata e le aspettative condizionate, si ricava

$$E(Y) = \sum_{i=1}^l E(Y|X = x_i) p(X = x_i)$$

Detto in altro modo, l'aspettativa di Y è l'aspettativa dell'aspettativa condizionata di X , cioè

$$E(Y) = E[E(Y|X)]$$

(James H. Stock, 2005)

$$[44] \quad E(HE_{t_{m+1}}|S_{t_0}) = S_{t_0} e^{-\mu(t_{m+1}-t_0)} [\bar{\Delta}_{t_m} - \bar{N}_{t_{m+1}}(d1)] \\ - K e^{-r(T-t_{m+1})} [\bar{N}_{t_m}(d2) - \bar{N}_{t_{m+1}}(d2)]$$

E' opportuno fare un'osservazione. Trovandoci in un'economia dove gli investitori hanno un atteggiamento neutrale nei confronti del rischio, ovvero un'economia in cui il rendimento atteso del titolo sottostante ed il tasso *risk-free* sono uguali, $\mu = r$, il valore attuale (*discounted value*) del *hedging error* è pari a

$$[45] \quad DV(HE) = \sum_{m=0}^{M-1} \frac{E(HE_{t_{m+1}}|S_{t_0})}{e^{r(t_{m+1}-t_0)}}$$

In un contesto del genere, la sommatoria dei singoli valori attuali degli *hedging errors* futuri, sarà uguale alla differenza tra i valori a t_0 di una opzione *call* calcolata con la *adjusted volatility* e l'altra con la volatilità del sottostante, cioè

$$[46] \quad \sum_{m=0}^{M-1} \frac{E(HE_{t_{m+1}}|S_{t_0})}{e^{r(t_{m+1}-t_0)}} = \bar{C}_{t_0} - C_{t_0}$$

La [46] conduce al seguente risultato: in un'economia neutrale al rischio dove $\mu = r$, la differenza di valore tra le due *call* a t_0 sarà nulla quando la sommatoria del valore attuale degli *hedging errors* futuri, indipendentemente dal numero di intervalli temporali fino a scadenza dell'opzione, sarà paria a zero. Conseguentemente la *hedging volatility* e la volatilità del sottostante saranno uguali, $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2$.

In particolar modo si osserva un'interessante proprietà: nel caso in cui ci troviamo in una *risk neutral economy*, ovvero $\mu = r$, e nell'ipotesi in cui $\bar{\sigma} = \sigma$, i valori attuali della componente rischiosa e della componente priva di rischio del portafoglio sono delle martingale¹⁰⁹

¹⁰⁹ Il termine martingala si ricollega ad una serie di strategie utilizzate dagli scommettitori francesi nel XVIII secolo. La strategia consiste nell'iniziare puntando la somma 1 alla prima giocata e, in seguito, ancora 1 dopo una vincita (testa), e raddoppiando sistematicamente la posta precedente $S_n + 1 = 2S_n$ dopo una perdita (croce). Indichiamo con $X_0, X_1, X_2 \dots X_N$ il denaro posseduto dal giocatore rispettivamente prima del primo lancio X_0 , dopo il primo lancio X_1 , dopo il secondo lancio X_2 e così via. Allora, da quanto spiegato

$$[47] \quad E \left[\frac{\Delta_{t_{m+1}} S_{t_{m+1}}}{e^{r(t_{m+1}-t_0)}} \middle| S_{t_0} \right] = \Delta_{t_0} S_{t_0}$$

$$[48] \quad E \left[\frac{-K e^{-r(T-t_{m+1})} N_{t_{m+1}}(d2)}{e^{r(t_{m+1}-t_0)}} \middle| S_{t_0} \right] = -K e^{-r(T-t_0)} N_{t_0}(d2)$$

In altre parole, tali valori attesi al tempo t_{m+1} sono pari ai valori iniziali a t_0 .

Sì strutturata la parte preliminare del suo modello, Leland ricava il valore atteso dei costi di transazione sostenuti al termine del singolo intervallo temporale. Il modello si basa sull'approssimazione¹¹⁰, e non sull'esatto valore, di tali costi di transazione che esprime come:

$$[49] \quad E(ATC_{t_{m+1}} | S_{t_m}) = \frac{1}{2} k \bar{\Gamma}_{t_m} S_{t_m}^2 E_{t_m} \left| \frac{S_{t_{m+1}} - S_{t_m}}{S_{t_m}} \right|$$

dove il valore atteso $E_{t_m} \left| \frac{S_{t_{m+1}} - S_{t_m}}{S_{t_m}} \right| \equiv V(\sigma, \mu, \Delta t)$, e, come precedentemente indicato nella nota 105, assumendo che $\frac{S_{t_{m+1}} - S_{t_m}}{S_{t_m}}$ si distribuisca in modo normale, è possibile approssimare $V(\sigma, \mu, \Delta t)$ a $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \sqrt{\Delta t}$.¹¹¹ Inoltre notiamo la presenza del *gamma* nella formula, che ricordando la [40] è

$$[50] \quad \bar{\Gamma}_{t_m} = \frac{1}{S_{t_m} \bar{\sigma} \sqrt{2\pi(T-t_m)}} e^{-\frac{1}{2}(d_1^2)}$$

Date le note proprietà del *gamma*, la diminuzione del *gamma* stesso all'avvicinarsi della scadenza dell'opzione, nel caso in cui il sottostante sia *in the money*, viene compensata

sopra, il valore atteso di X_N , ovvero del denaro posseduto (guadagno) dopo N lanci, sarà semplicemente X_0 , ovvero la somma inizialmente posseduta. (Mininni, 2014)

¹¹⁰ Leland non utilizza il valore assoluto del gamma. La misura del valore esatto dei costi di transazione sarebbe valida solo se il valore del gamma – il quale è funzione del prezzo del sottostante – non cambiasse significativamente tra l'inizio e la fine del periodo. (Toft, 1994)

¹¹¹ (Leland, 1985)

dalla maggiore dispersione della distribuzione del prezzo del sottostante, per tanto anche $\bar{\Gamma}_{t_m} S_{t_m}^2$ è una martingala.

Anche in questo caso è possibile calcolare il valore atteso approssimato dei costi di transazione sulla base del prezzo del sottostante a t_0 , cioè S_{t_0} , per mezzo della Legge delle aspettative iterate:

$$[51] \quad E(ATC_{t_{m+1}}|S_{t_0}) = \frac{1}{2} k \bar{\Gamma}_{t_0} (S_{t_0} e^{\mu(t_m-t_0)})^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \sqrt{\Delta t}$$

dove, nella fattispecie, il gamma sarà pari a

$$[52] \quad \bar{\Gamma}_{t_0} = \frac{1}{S_{t_0} e^{\mu(t_{m+1}-t_0)} \bar{\sigma} \sqrt{2\pi T}} e^{-\frac{1}{2}(d_1^2)}$$

La struttura dei costi di transazione è la stessa per ogni intervallo temporale e sarà funzione del quadrato del valore atteso del sottostante all'inizio dell'intervallo temporale, del *gamma* modificato con la volatilità aggiustata e del valore atteso della variazione del prezzo del sottostante nell'intervallo temporale. Inoltre, analogamente a quanto già detto nelle precedenti pagine, anche i costi di transazione, nel caso di *risk neutral economy* e in assenza di aggiustamenti della volatilità, sono delle martingale. Più esplicitamente

$$[53] \quad \frac{E(ATC_{t_{m+1}}|S_{t_0})}{e^{r(t_{m+1}-t_0)}} = \frac{E(ATC_{t_m}|S_{t_0})}{e^{r(t_m-t_0)}} \text{ con } m \in \{1, \dots, M\}$$

L'equazione [49] è il valore atteso approssimato dei costi di transazione per ogni intervallo temporale ed è funzione del valore atteso della variazione dei prezzi del sottostante. E' inoltre possibile calcolarsi il valore atteso esatto dei costi di transazione al termine di ogni intervallo temporale, che è proporzionale al valore della quantità transata necessaria per ricalibrare il portafoglio in funzione del valore atteso del prezzo del sottostante al tempo t_{m+1} , ed è calcolato come segue

$$[54] \quad E(TC_{t_{m+1}}|S_{t_m}) = \frac{1}{2} k E_{t_m} |(\bar{\Delta}_{t_{m+1}} - \bar{\Delta}_{t_m}) S_{t_{m+1}}|$$

Definite, dunque, le equazioni relative ai *transaction costs* per singolo intervallo temporale, gli *hedging errors* andranno nettati dei costi di transazione al fine di determinare i flussi di cassa derivanti dalla strategia di replica così costruita. I risultati degli *hedging errors* meno i *transaction costs* per singolo intervallo temporale, al fine di ottenere il valore per l'intera durata del contratto, possono essere semplicemente sommati in quanto non sono tra loro correlati. Per mezzo degli opportuni calcoli, l'approssimazione dello *hedging error*, per un intervallo temporale, sulla base del prezzo a t_0 , applicando la formula di Taylor¹¹², è

$$[55] \quad E(AHE_{t_{m+1}}|S_{t_0}) = \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{t_0} (S_{t_0} e^{\mu(t_m-t_0)})^2 (\bar{\sigma}^2 - \sigma^2) \Delta t$$

Osserviamo che sia gli *hedging errors* che i costi di transazione sono dipendenti dall'andamento del sottostante. In particolare gli *hedging errors* saranno influenzati dal segno del *theta* e del *gamma* dell'opzione, mentre i costi di transazione dipenderanno dal valore assoluto del *gamma*.¹¹³

Sottraendo dal valore attuale approssimato degli *hedging errors* il valore attuale approssimato dei *transaction costs*, per singolo intervallo temporale, si ottiene:

$$[56] \quad E(AHETC_{t_{m+1}}|S_{t_0}) = E[AHE_{t_{m+1}} - ATC_{t_{m+1}}] = \\ = \frac{1}{2} \bar{\Gamma}_{t_0} (S_{t_0} e^{\mu(t_m-t_0)})^2 \left[(\bar{\sigma}^2 - \sigma^2) \Delta t - k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \sqrt{\Delta t} \right]$$

Quest'ultima equazione conduce ad un importante risultato: la differenza tra gli *hedging errors* e i *transaction costs* tenderà a zero per un valore della *adjusted volatility* tale per cui l'espressione raccolta tra le parentesi quadre della [56] sia uguale a zero, ovvero

$$[57] \quad (\bar{\sigma}^2 - \sigma^2) \Delta t - k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \sqrt{\Delta t} = 0$$

¹¹² (Toft, 1994)

¹¹³ (Zakamouline, 2006)

Risolvendo la [57] si ottiene la volatilità introdotta da Leland, $\bar{\sigma}$, così come espressa dall'equazione [39].

Successivamente è possibile computare la varianza della strategia di copertura relativamente ad un singolo intervallo temporale, sapendo il valore del sottostante all'inizio del periodo. Quindi il valore approssimato della varianza dei flussi di cassa realizzati è data da

$$[58] \quad var(AHETC_{t_{m+1}}|S_{t_m}) = \frac{1}{4}(\bar{\Gamma}_{t_m} S_{t_m}^2)^2 \left(E_{t_m} \left[\bar{\sigma}^2 \Delta t - \left(\frac{S_{t_{m+1}} - S_{t_m}}{S_{t_m}} \right)^2 - k \left| \frac{S_{t_{m+1}} - S_{t_m}}{S_{t_m}} \right| \right]^2 - \left[(\bar{\sigma}^2 - \sigma^2) \Delta t - k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma \sqrt{\Delta t} \right]^2 \right)$$

dalla quale svolgendo i calcoli si ottiene

$$[59] \quad var(AHETC_{t_{m+1}}|S_{t_m}) = \frac{1}{4}(\bar{\Gamma}_{t_m} S_{t_m}^2)^2 \left(k^2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) \sigma^2 \Delta t + 2k \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma^3 \Delta t^{\frac{3}{2}} + 2\sigma^4 \Delta t^2 \right)$$

In conclusione, un investitore avverso al rischio adotterà un Δt molto piccolo, ovvero una strategia di replica caratterizzata da una maggiore frequenza di ricalibrazione del portafoglio. La *hedging volatility* sarà maggiore e comporterà la riduzione del valore assoluto del *gamma*. Ciò implica una minore sensibilità del *delta* e quindi gli *hedging errors* saranno caratterizzati da una minore varianza. Tale strategia di copertura sarà, per tanto, meno rischiosa.¹¹⁴ Viceversa nel caso di un investitore maggiormente tollerante al rischio.

Leland dimostra che, in presenza di costi di transazione che ipotizza proporzionali al valore del sottostante, la strategia in oggetto permette al portafoglio sì costruito di

¹¹⁴ (Zakamouline, 2006)

replicare il *payoff* dell'opzione: il prezzo di un'opzione sarà pari al costo del portafoglio di replica aumentato dei costi di transazione. Questi ultimi saranno compensati con l'aumento della *hedging volatility*, indipendentemente della frequenza di revisione, ovvero dall'ampiezza degli intervalli temporali.

3.3.2 Critiche al modello di Leland

Il modello proposto da Leland è interessante in quanto sviluppa un modello di copertura alternativo grazie all'utilizzo della *hedging volatility*, ma risulta comunque difettato in quanto non considera i costi di transazione iniziali per la costruzione del portafoglio.

Yuri M. Kabanov e **Mher M. Safarian** nell'articolo intitolato *On Leland's strategy of option pricing with transactions costs*, dimostrano come gli *hedging errors* non tendano a zero: questi saranno nulli solo nel caso in cui i costi di transazione tenderanno a zero e gli intervalli temporali tra una ricalibrazione e l'altra saranno sempre più brevi, fino a diventare nulli. L'aumento esogeno della volatilità determina un aumento del premio dell'opzione rispetto al caso in cui non sono presenti i costi di transazione: questo dovrebbe compensare la presenza dei costi di transazione, ma prove empiriche dimostrano che tale strategia non permette di replicare il *pay-off* dell'opzione e di conseguenza gli *hedging errors* non sono nulli come sostenuto da Leland. L'idea di compensare i costi di transazione con l'aumento arbitrario della volatilità, al diminuire della lunghezza dell'intervallo di ricalibrazione, porta al caso limite in cui se la *hedging volatility*, $\bar{\sigma}^2$, tende all'infinito al ridursi dell'intervallo di ricalibrazione, $\Delta t \rightarrow 0$, il valore dell'opzione si avvicina al prezzo del sottostante. La spiegazione è riconducibile al fatto che in tali circostanze si potrebbe concretizzare una strategia detta *super-replication*. Ciascun portafoglio che super-replica il valore dell'opzione costa di più, quindi occorre scegliere quello che super-replica al minor costo. Pertanto la strategia per super-replicare a minimo costo è quella di un portafoglio composto da una quota del titolo sottostante.¹¹⁵ Mantenere tale portafoglio fino a scadenza fa sì che il costo minimo per la copertura della *call*, indipendentemente da quanto siano bassi i costi di transazione, sia esattamente pari al valore della quota del sottostante. Quindi il valore iniziale

¹¹⁵ (www.theblog.it/economia)

dell'opzione è uguale al valore del sottostante, mentre il *pay-off* del portafoglio di replica composto dal sottostante, S , sarà maggiore del valore dell'opzione a scadenza, che è $\max(S - K; 0)$, finché il prezzo di esercizio sarà maggiore di zero. Ciò contraddice proprio quanto affermato dallo stesso Leland nella nota 13¹¹⁶ del proprio articolo *Option Pricing and Replication with Transaction Costs*. Tale strategia, quindi, dal punto di vista economico non è interessante per chi deve emettere l'opzione.

Rimane comunque il fatto che l'aumento della frequenza di revisione del portafoglio, determina sì la riduzione degli *hedging errors*, ma allo stesso tempo un aumento dei costi di transazione. Com'è, dunque, possibile conciliare i due effetti, cercando di limitare il rischio per l'investitore e allo stesso tempo ridurre i costi di transazione? E' importante precisare che nella strategia proposta da Leland, ed in generale le strategie di replica *Time based*, la ricalibrazione del portafoglio avviene ad intervalli di tempo discreti e non tiene conto, a differenza dei modelli *move based*, del fatto che tale negoziazione sia ottimale. Una strategia ottimale ha come obiettivo quello di raggiungere il miglior *trade-off* tra il rischio a cui è esposto l'investitore ed i costi di transazione.

3.4 Utility based approach

L'alternativa ad una strategia di replica in tempi discreti, *time based*, è una strategia che prende in considerazione l'avversione o la propensione al rischio dell'investitore. Uno degli approcci di maggior successo nell'ambito delle strategie di copertura è il modello di **Hodges** e **Neuberger**, del 1989, che tiene conto dell'avversione al rischio dell'investitore basandosi sulla massimizzazione dell'utilità. Si assume che ogni investitore abbia una funzione di utilità esponenziale negativa, nella seguente forma¹¹⁷

$$[60] \quad U(z) = -e^{-\gamma z}; \quad \gamma > 0$$

¹¹⁶ Leland nella nota 13 del suo lavoro spiega appunto che non si deve cadere nel paradosso che se $\Delta t \rightarrow 0$ allora $\bar{\sigma} \rightarrow \infty$, $\bar{C}_0 \rightarrow S_0$, $\bar{\Delta} \rightarrow 1$ e $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$, implicando che la strategia di replica consiste nel detenere una quota del titolo in portafoglio e non fare *trading*. (Leland, 1985) – pag. 1295

¹¹⁷ (Zakamouline, 2006)

dove γ rappresenta l'avversione al rischio dell'investitore. Il caso di un investitore che ha una bassa avversione al rischio è assimilabile ad una strategia di copertura statica in cui sostanzialmente il portafoglio non viene mai ricalibrato: il *delta* del portafoglio rimane tale fino a scadenza. Nel caso, invece, di un investitore con una più alta avversione al rischio¹¹⁸, la strategia di copertura sarà più dinamica, con una maggiore frequenza delle ricalibrazioni del portafoglio.

Si identificano delle zone di confine entro cui il *delta hedge* può variare. Tali confini dati dal valore minimo, Δ_l , e massimo, Δ_u , del *delta* rappresentano i valori per cui l'investitore è indifferente, in termini di utilità, tra ricalibrare le quote del portafoglio e non fare alcuna negoziazione. La zona compresa fra questi due valori di confine è detta *no transaction region*, nella quale non avvengono negoziazioni. Nel momento in cui lo *hedge ratio* del portafoglio esce al di fuori della *no transaction region* si negoziano le quote in portafoglio al fine di riportare il suo valore al valore di confine più vicino.

Appare chiaro che tale modello, rispetto agli altri, permette di ottenere un miglior risultato in termini di *trade-off* tra i rischi assunti dall'investitore ed i costi di transazione legati alla strategia di replica: il portafoglio viene ricalibrato solo nel momento in cui il valore del *delta* è tale da rendere il portafoglio più rischioso rispetto a quanto riesce a sopportare l'investitore. Ciononostante presenta diversi svantaggi: il modello non presenta delle formule esplicite ed i calcoli sono molto complessi; inoltre richiede un continuo monitoraggio. Ciò significa che è necessario molto tempo e questo non è conciliabile con l'attività di trading dove quasi sempre le decisioni devono essere prese molto velocemente.

3.5 Move based approach

Esistono altre strategie di replica alternative. Nei modelli *move based* il ribilanciamento del portafoglio dipende dai movimenti del sottostante.

¹¹⁸ Nel caso in cui l'avversione al rischio sia elevata è possibile assumere che la quota inizialmente investita nella componente rischiosa sia pari a 0. (Zakamouline, 2006)

3.5.1 Delta Tolerance¹¹⁹

Una versione semplificata del modello precedente è sviluppata, nel 1993, da **Whalley** e **Wilmott** i quali introducono una strategia di copertura nella quale il ribilanciamento avviene quando il valore assoluto della differenza tra lo *hedge ratio* del portafoglio ed il *delta* dell'opzione supera un certo livello di tolleranza prestabilito, ovvero:

$$[61] \quad \left| \Delta - \frac{\partial V}{\partial S} \right| > H$$

Il Δ è lo *hedge ratio* del portafoglio¹²⁰, $\frac{\partial V}{\partial S}$ è il *delta* così come definito da Black-Scholes, ∂V è la variazione del valore dell'opzione e H è il livello di tolleranza fissato in base al livello di avversione al rischio dell'investitore: un valore più basso implica una *no transaction region* più ristretta, tipico di un investitore avverso al rischio e quindi comporta una maggiore frequenza delle rinegoziazioni delle quote in portafoglio; viceversa un livello di elevato di H implica una maggiore propensione al rischio e quindi una maggiore ampiezza della *no transaction region*. L'investitore dovrà monitorare costantemente la discrepanza tra lo *hedge ratio* del portafoglio e il valore del *delta*: se $\left| \Delta - \frac{\partial V}{\partial S} \right| > H$, allora si procede alla ricalibrazione al fine di riportare lo *hedge ratio* al valore definito da Black-Scholes che permette di replicare esattamente il valore dell'opzione.

3.5.2 Fixed Bandwidth Around Delta¹²¹

Una versione molto simile al modello *Delta Tolerance* è il *Fixed Bandwidth Around Delta*, proposto da **Martellini** e **Priaulet** nel 2002. In questo caso l'investitore dovrà costantemente monitorare il livello dello *hedge ratio*, che è misurato dalla seguente equazione:

$$[62] \quad \Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \pm H$$

¹¹⁹ (Luoma, 2010)

¹²⁰ Ovvero la quantità di sottostante detenuta nel portafoglio di copertura.

¹²¹ (Luoma, 2010)

H rappresenta una costante stabilita sulla base dell'avversione al rischio dell'investitore, che definisce il valori di confine. Nel caso in cui il valore dello *hedge ratio* superasse i valori di confine, l'investitore procede alla ricalibrazione del portafoglio. La differenza sostanziale tra questo modello ed il modello *Delta Tolerance* sta nel fatto che in questo caso la rinegoziazione delle quote in portafoglio porta il *delta hedge* del portafoglio al valore di confine della *no transaction region* e non al valore del *delta* calcolato secondo Black-Scholes, così come il *Delta Tolerance*.

3.5.3 Variable Bandwidth Delta¹²²

Dato che il modello *utility-based* in presenza costi di transazione non fornisce una soluzione esplicita ed i calcoli sono molto complessi e richiedono molto tempo, **Whalley** e **Wilmott**, nel 1997, elaborano un modello che fornisce delle soluzioni asintotiche¹²³. I due autori, assumendo dei costi di transazione relativamente bassi, derivano la formula per definire una *no transaction region* che presenta dei confini variabili. Tale formula, che è applicabile non solo nel caso di una posizione *short* su un'opzione *call* europea, ma è valida per tutte le opzioni, è la seguente:

$$[63] \quad \Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \pm H_{ww} = \frac{\partial V}{\partial S} \pm \left(\frac{3}{2} \frac{e^{-r(T-t)} k S \Gamma^2}{\gamma} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$\frac{\partial V}{\partial S}$ è il *delta* così come definito da Black-Scholes, k sono i costi di transazione, Γ è il *gamma* dell'opzione e γ rappresenta l'avversione al rischio dell'investitore. La stessa può essere riscritta come

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \pm h(e^{-r(T-t)} S \Gamma^2)^{\frac{1}{3}}$$

¹²² (Luoma, 2010)

¹²³ Si intende una serie formale di funzioni, non necessariamente convergente verso certi valori in un punto o all'infinito, tale che, a patto di restringersi ad intorni sufficientemente piccoli, fornisce un'approssimazione di una data funzione per un valore particolare.

dove $h = \left(\frac{3k}{2\gamma}\right)^{\frac{1}{3}}$ è un parametro costante legato all'avversione al rischio dell'investitore.

Risulta evidente la dipendenza del *delta ratio* da numerosi parametri che non sono costanti nel tempo e che rendono variabile l'ampiezza della *no transaction region*. Per $k \rightarrow 0$, il *delta ratio* è pari al *delta* definito da Black-Scholes. Il grado di avversione al rischio incide sull'ampiezza della *no transaction region*, infatti maggiore è γ e minore sarà l'ampiezza, il che implica una frequenza di ricalibrazione del portafoglio maggiore per ridurre il rischio. Nel caso limite di $\gamma \rightarrow \infty$, tale approccio porta al modello di Leland, ovvero, detto in altri termini, l'incremento dell'avversione al rischio è compensato dall'aumento della *adjusted volatility*. Inoltre, man mano che si avvicina la scadenza dell'opzione la *no transaction region* sarà più ampia. La dipendenza del *delta ratio* con il *gamma* è ovvia dato che il *gamma* misura la variabilità del *delta* al variare del valore del sottostante: quando il *gamma* è elevato, ci si attende una maggiore variabilità del *delta* e quindi una *no transaction region* più ampia, mentre quando il valore del *gamma* del portafoglio tende a zero l'ampiezza della *no transaction region* tende ad essere costante.¹²⁴

3.5.4 Asset Tolerance¹²⁵

Altro modello molto simile al *Delta Tolerance* è quello proposto da **Henrotte** (1993), ovvero l'*Asset Tolerance*. La differenza sta nel fatto che in questo caso la variabile che influisce sulla ricalibrazione del portafoglio è la percentuale di variazione del titolo sottostante. Tale strategia prevede la rinegoziazione delle quote del portafoglio di replica solo a seguito di determinate variazioni di prezzo del sottostante. Il cosiddetto *trigger event*, cioè l'evento che attiva il processo di ricalibrazione del portafoglio, è dato da:

$$[64] \quad \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} \pm h$$

¹²⁴ (Zakamouline, 2006)

¹²⁵ (Luoma, 2010)

dove $\frac{S_{t+1}-S_t}{S_t}$ è la variazione del valore del sottostante e h è il livello di tolleranza fissato in termini percentuali, il quale dipende dal grado di avversione al rischio dell'investitore. Una maggiore avversione al rischio implica una minore percentuale di variazione del sottostante, cioè un valore più basso di h , il che si traduce in una *no transaction region* più contenuta; viceversa una maggiore propensione al rischio fa sì che siano necessarie delle variazioni più ampie del sottostante per attivare la procedura di ricalibrazione del portafoglio. Nel caso in cui $\left| \frac{S_{t+1}-S_t}{S_t} \right| > h$ l'investitore provvederà a ricalibrare il *delta ratio* del portafoglio per riportarlo al valore di perfetta copertura.

4 Obiettivo e sviluppo della tesi

In questa tesi ci proponiamo l'obiettivo di esaminare alcuni modelli di replica del valore delle opzioni alternativi al modello di Black-Scholes al fine di verificare gli errori di copertura in una strategia dinamica di replica di una singola opzione, nel nostro caso un'opzione *call* europea, nella quale si costruisce un portafoglio che replica il valore dell'opzione tenendo conto dei costi di transazione. In particolare andremo a costruire 3 portafogli applicando due modelli tra quelli precedentemente esposti, quali: il *Time based* e l'*Asset Tolerance*.

Abbiamo seguito l'approccio usato da Black-Scholes, le cui assunzioni si basano sull'ipotesi che il valore del sottostante si muova seguendo un moto browniano geometrico. Riportiamo di seguito tre esempi di come si evolve il prezzo di un titolo¹²⁶ al variare della volatilità nei casi in cui questa assuma valori pari a 0.1, 0.2 e 0.3:

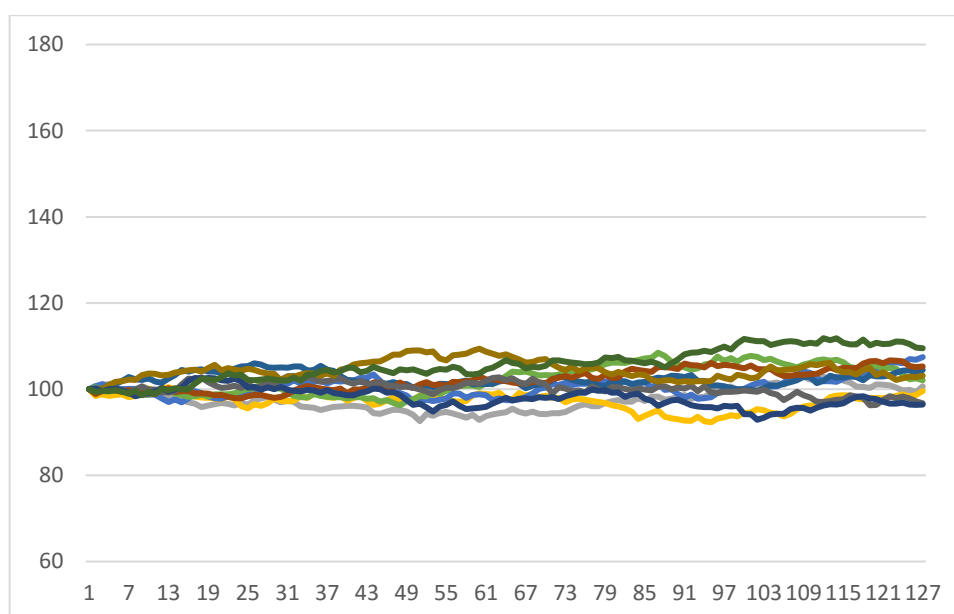


Figura 1. Evoluzione del sottostante con $\sigma = 0,1$

¹²⁶ Nell'esempio proposto abbiamo ipotizzato un prezzo iniziale pari a 100 ed un fattore *drift* pari a 0,04.

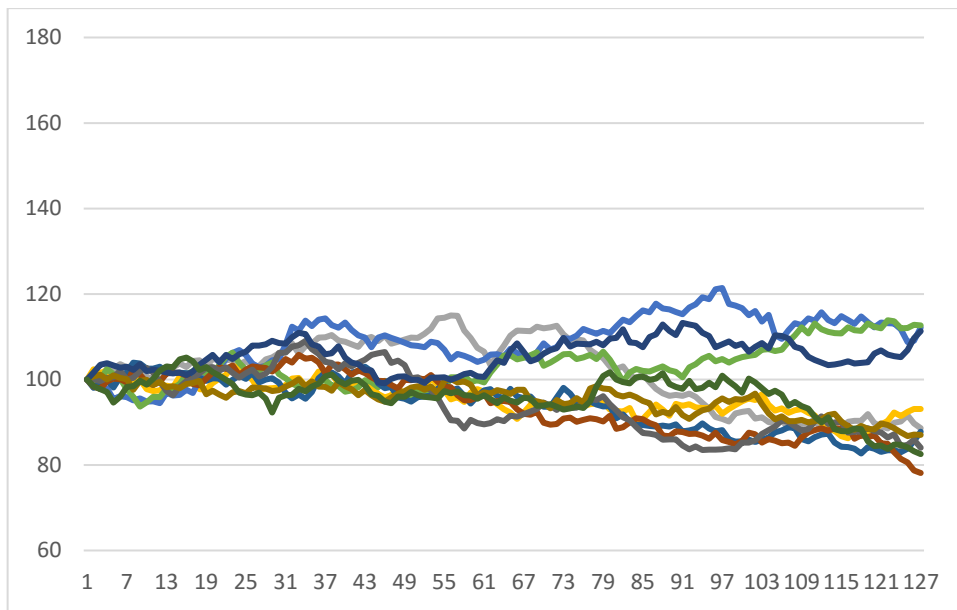


Figura 2. Evoluzione del sottostante con $\sigma = 0,2$

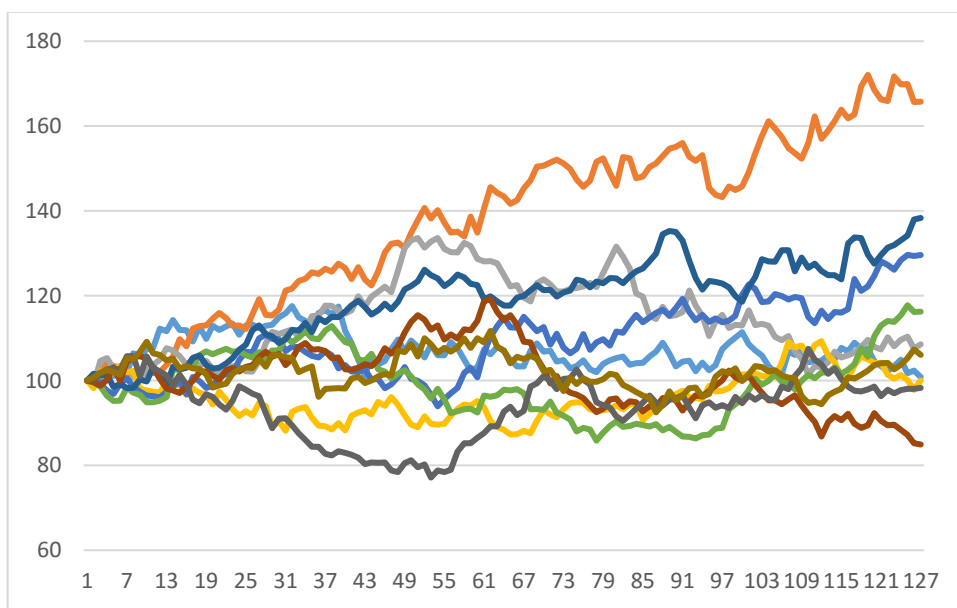


Figura 3. Evoluzione del sottostante con $\sigma = 0,3$

La volatilità misura l'incertezza dei movimenti futuri del prezzo: al crescere della volatilità, quindi, i movimenti di prezzo sono più ampi. Si osserva, infatti, che nel caso in cui la volatilità sia contenuta, il valore del titolo non subisce eccessive fluttuazioni, mentre nel caso in cui la volatilità è più elevata i prezzi tendono a registrare più ampie fluttuazioni, con la conseguente possibilità che a scadenza il sottostante possa valere molto di più o molto di meno rispetto al valore iniziale. Inoltre, dato che i prezzi seguono

un *processo di Markov*, l'evoluzione del prezzo futuro dipenderà solo dalle nuove informazioni che arrivano al mercato, rendendo impossibile conoscere anticipatamente il valore a scadenza del titolo sottostante.

È bene ricordare dal paragrafo 2.3.1.1, che il valore della volatilità non è conosciuto, ma va stimato. Una stima della volatilità comunemente impiegata è la *implied volatility*, che si ottiene invertendo l'equazione di Black-Scholes per calcolare l'unico valore della volatilità che renda soddisfatta l'equazione quando siano dati i prezzi correnti a cui il sottostante e l'opzione vengono scambiati.

Occorre tener presente che nella realtà l'investitore avrà conoscenza solo del prezzo iniziale del sottostante. In questo lavoro, invece, l'evoluzione dell'andamento dei prezzi è stato simulato. Per costruire, quindi, il portafoglio di replica abbiamo inizialmente simulato, attraverso l'ausilio della simulazione Monte Carlo, 1000 realizzazioni del sottostante: nel nostro caso è un'azione con *drift* pari a 0.04, volatilità pari a 0.3 e prezzo iniziale pari a 100. Il valore dello *strike price* dell'opzione è 100. Inoltre abbiamo considerato i costi di transazione che abbiamo ipotizzato proporzionali, per un valore dell'1%¹²⁷, al controvalore della quota del titolo sottostante scambiata per ricalibrare il portafoglio.

Essendo il fattore *drift* positivo, il valore medio del sottostante è tendenzialmente crescente nel tempo e quindi anche il valore dell'opzione *call* ha un andamento crescente. Il valore dell'opzione *put* decresce fino a zero nel lungo periodo, il che è comprensibile dato che il valore atteso nel futuro del prezzo del sottostante è maggiore dello *strike price* ed è dunque lecito attendersi che l'opzione *put* verrà abbandonata. Lasciando inalterato il valore della volatilità ed aumentando il valore di *drift*, la crescita delle realizzazioni sarebbe maggiormente accentuata.

La simulazione Monte Carlo è basata sul campionamento casuale al fine di ottenere dei risultati numerici. Ha un'impostazione diversa rispetto agli altri metodi: è una

¹²⁷ Non abbiamo assunto un valore pari allo 0.1%, così come stabilito dalla normativa, solo per far sì che il valore dell'*adjusted volatility* sia maggiormente influenzato dai costi di transazione.

simulazione numerica basata sul campionamento statistico. Poggia sul concetto di probabilità, mentre gli altri hanno un approccio geometrico. Si basa sulla casualità, cioè la possibilità di individuare un valore casuale in un intervallo prestabilito. La componente stocastica nel moto browniano geometrico si distribuisce in modo normale con media nulla e varianza unitaria¹²⁸. La funzione '=CASUALE()', presente nei sistemi informatici e fogli di calcolo, che serve per trovare i valori casuali, restituisce un risultato ≥ 0 e < 1 distribuiti uniformemente. Attraverso la funzione '=INV.NORM(CASUALE(); media; dev.st)', ovvero l'inversa della distribuzione normale¹²⁹, otteniamo i risultati¹³⁰ a noi necessari. E' bene sottolineare che i risultati ottenuti su un ampio numero di simulazioni sono realistici, ma non poggiano su valori di mercato reali.

Per la realizzazione dei vari portafogli abbiamo utilizzato un software di calcolo: nella fattispecie ci siamo avvalsi dell'ausilio di Excel perché ha un'interfaccia grafica che ne facilita l'utilizzo, ma i medesimi risultati potevano essere raggiunti mediante altri software, come ad esempio Matlab. Occorre precisare che i fogli elettronici hanno dei limiti strutturali in quanto un numero troppo elevato di simulazioni potrebbe portare a rallentamenti nei calcoli dovuti alle dimensioni del file: solo a titolo esemplificativo, i nostri files di Excel hanno una dimensione di circa 50MB l'uno e, tenendo conto che abbiamo utilizzato un calcolatore con un processore con delle performance nella media, il tempo necessario all'apertura del file è di circa 30-40 secondi. Nel caso di un numero più elevato di simulazioni, al fine di ovviare a tali problematiche, si dovrebbero usare dei linguaggi di programmazione su macchine con processori più performanti e di ultima generazione.

Abbiamo impostato i fogli di calcolo tutti allo stesso modo al fine di agevolare le procedure di calcolo. La cartella di lavoro è caratterizzata da più files all'interno dei quali abbiamo computato singolarmente tutti gli elementi necessari per costruire i portafogli di replica. In sequenza, dunque, abbiamo: simulato l'andamento del sottostante; calcolato il

¹²⁸ Si rimanda al paragrafo 2.3.

¹²⁹ La funzione '=DISTRIB.NORM(X; media; dev.st)' restituisce la probabilità di ottenere un risultato $\leq X$, che rappresenta l'area al di sotto del grafico.

¹³⁰ Otteniamo il quantile di tale distribuzione di probabilità (che abbiamo ottenuto con la funzione '=CASUALE()').

valore delle opzioni secondo le formule di Black-Scholes, individuando quindi i valori $N(d_1)$ e $N(d_2)$; calcolato il valore dei portafogli ad ogni intervallo temporale; calcolato il valore degli *hedging errors* per ogni singolo intervallo temporale. Il passo successivo è stato calcolare i costi di transazione che si generano ogni qualvolta si effettuano le negoziazioni per ricalibrare il portafoglio e li abbiamo sottratti agli errori di copertura precedentemente individuati. Dato che gli *hedging errors* sono dei flussi di cassa, l'idea è stata quella di considerare tali errori nettati dei costi di transazione in modo da simulare un deposito bancario: in questo modo i valori giornalieri così ottenuti, positivi e negativi, sono stati capitalizzati¹³¹ fino alla scadenza dell'opzione.

Nei nostri calcoli abbiamo utilizzato il tasso privo di rischio in conformità alla valutazione neutrale verso il rischio adottata da Black-Scholes. Da notare che considerare il tasso *free risk* invece che μ non è essenziale per i risultati della simulazione, ma permette di semplificare i calcoli di attualizzazione.

Abbiamo quindi seguito le strategie di replica alternative che sono state esposte nel paragrafo precedente, in particolare sono stati presi in considerazione tre casi, quali:

- 1) un primo portafoglio di replica basato sull'approccio *Time based*. In questo caso abbiamo calcolato la *adjusted volatility* secondo quanto indicato da Leland, ricalibrando il portafoglio a differenti intervalli di tempo discreti prestabiliti, quali: una volta al giorno (1d), una volta alla settimana (1w), una volta ogni due settimane (2w), una volta al mese (1m), una volta ogni tre mesi (3m). Il ribilanciamento del portafoglio avviene ad ogni intervallo temporale prestabilito, per tanto il valore del portafoglio rimarrà invariato fino al successivo riequilibrio delle quote;
- 2) un secondo portafoglio di replica basato sull'approccio *move based* secondo il modello *Asset Tolerance*. La ricalibrazione del portafoglio è avvenuta solo quando la variazione del sottostante, che è stata monitorata ad ogni *step* temporale, nel nostro caso giornaliero, superi un certo valore, nello specifico: 0.1%, 0.2%, 1%, 5%, 10%. Le quote del sottostante rimarranno tali fino a quando non si

¹³¹ Secondo la legge della capitalizzazione continua.

verificherà una variazione significativa del sottostante, *trigger event*, al verificarsi del quale l'investitore negozierà le quote dei titoli in portafoglio per far sì che lo stesso replichi esattamente il valore del portafoglio;

- 3) un terzo portafoglio di replica basato sul modello *Asset Tolerance* in combinazione con la *adjusted volatility* secondo quanto stabilito da Leland. Anche in questo caso, come in quello precedente, le ricalibrature del portafoglio avvengono solo se la variazione del sottostante, tra un intervallo temporale e l'altro, superi un certo valore, quali: 0.1%, 0.2%, 1%, 5%, 10%.

Precisiamo fin da adesso che il terzo portafoglio è stato un nostro esperimento. Si è voluto verificare se applicando la *adjusted volatility* alla strategia *Asset Tolerance* si ottengono dei risultati migliori. La difficoltà in questo caso sta nel determinare l'intervallo temporale, tra una calibratura e l'altra, da impostare nel calcolo della *adjusted volatility*. Dato che gli intervalli temporali non sono prefissati come nel modello *Time based*, in quanto la ricalibrazione dipende dalla percentuale di variazione del sottostante, non è detto che siano intervalli temporali regolari. Per semplificare abbiamo ipotizzato un Δt pari ad un giorno, ma è chiaro che vengono meno le condizioni che stanno alla base della *adjusted volatility*, inficiando la bontà dei risultati. Riportiamo comunque i risultati ottenuti al fine di documentare quanto abbiamo fatto.

I portafogli sì costruiti sono stati, inoltre, confrontati con una strategia statica di copertura, nella quale, cioè, si costruisce un portafoglio di replica che non viene aggiustato e che, quindi, rimane così come inizialmente composto fino alla scadenza dell'opzione.

La ricalibrazione dei portafogli è avvenuta andando a ribilanciare di volta in volta il portafoglio modificandone il *delta ratio*. Dato che non vi è un continuo bilanciamento delle quote in portafoglio, è chiaro che si generano degli errori di copertura come già precedentemente argomentato. L'investitore che vorrà adottare una strategia dinamica, sarà interessato a determinare gli *hedging errors* ad ogni intervallo temporale fino alla scadenza dell'opzione ed i costi di transazione relativi alla negoziazione del titolo sottostante presente in portafoglio.

Ci siamo concentrati sugli *hedging errors* derivanti da tali strategie di copertura, ricordando che sono dei flussi di cassa: un valore maggiore di zero sta a significare un flusso di cassa positivo, mentre un valore negativo implica un esborso di risorse aggiuntive per l'investitore al fine di replicare esattamente il valore dell'opzione. La nostra analisi riguarda, quindi, il confronto tra i valori dei portafogli a scadenza ed il *payoff* dell'opzione, e gli errori di copertura al netto dei costi di transazione, capitalizzati fino a scadenza.

Passiamo ora a descrivere nel dettaglio i risultati ottenuti dalla costruzione dei tre portafogli.

Innanzitutto abbiamo confrontato il valore del portafoglio di replica con il valore dell'opzione. Il nostro interesse è stato quello di stabilire quale metodologia, di quelle prese in considerazione, permetta di far sì che il valore del portafoglio a scadenza abbia una più alta probabilità di replicare quanto più fedelmente il *payoff* dell'opzione. Nello specifico sono stati presi in considerazione i valori al di sotto e al di sopra di una certa percentuale del valore a scadenza dell'opzione.

Nel caso dei valori al di sotto di una certa percentuale del valore dell'opzione, abbiamo considerato le seguenti percentuali di riferimento: 95%, 97.5%, 99%, 99.9%, 100%. Riportiamo i grafici ed i dati ottenuti:

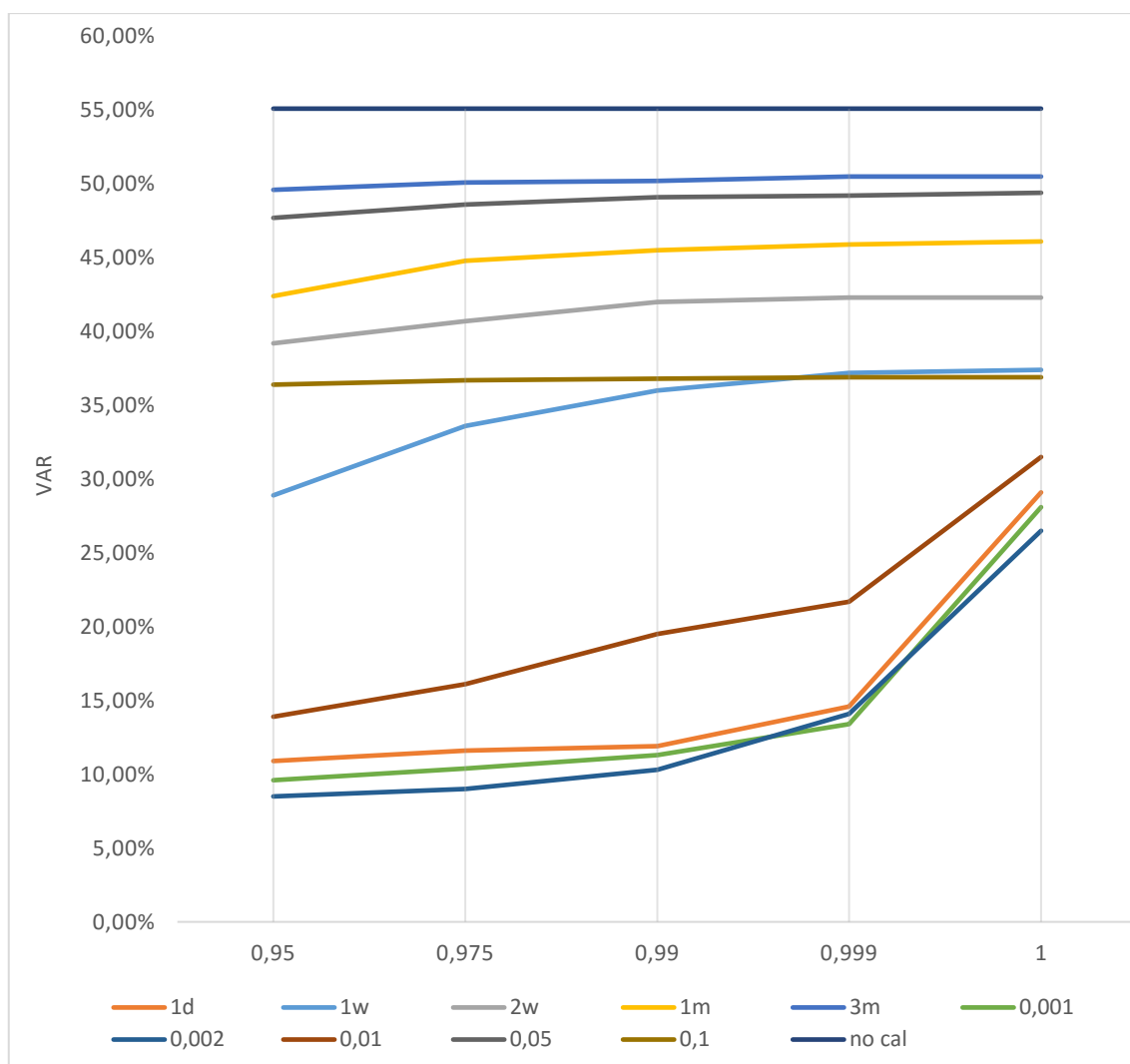


Figura 4. Confronto tra i vari portafogli

Portafogli	0.95	0.975	0.99	0.999	1
1d	10,90%	11,60%	11,90%	14,60%	29,10%
1w	28,90%	33,60%	36,00%	37,20%	37,40%
2w	39,20%	40,70%	42,00%	42,30%	42,30%
1m	42,40%	44,80%	45,50%	45,90%	46,10%
3m	49,60%	50,10%	50,20%	50,50%	50,50%
0.001	9,60%	10,40%	11,30%	13,40%	28,10%
0.002	8,50%	9,00%	10,30%	14,10%	26,50%
0.01	13,90%	16,10%	19,50%	21,70%	31,50%
0.05	47,70%	48,60%	49,10%	49,20%	49,40%
0.1	36,40%	36,70%	36,80%	36,90%	36,90%
No cal.	55,10%	55,10%	55,10%	55,10%	55,10%

Quello che si osserva è che i portafogli che prevedono una ricalibrazione più frequente riescono ad avere dei risultati che si avvicinano molto al *payoff* dell'opzione rispetto agli altri portafogli¹³². In particolare i portafogli che prevedono la ricalibrazione una volta al giorno e quelli che vengono ribilanciati ogni qualvolta si verifichino delle minime variazioni del sottostante¹³³ hanno una più bassa probabilità che il loro valore a scadenza sia inferiore rispetto alla percentuale prestabilita del valore dell'opzione.

In termini di *Value at Risk*¹³⁴, le percentuali indicate nel asse delle ordinate indicano la probabilità con la quale il portafoglio, a scadenza, subisca una perdita maggiore del 5%, 2.5%, 1%, 0.1%, 0% rispetto al valore dell'opzione. A titolo esemplificativo, riprendendo i valori riportati nella tabella di cui sopra, il portafoglio che viene ricalibrato una volta al giorno ha un VaR al 10.9% pari a 0.05, ovvero ha una probabilità del 10.9% di subire una perdita del 5% rispetto al valore dell'opzione; il portafoglio che viene ricalibrato quando il sottostante subisce una variazione superiore allo 0.2% ha un VaR all'8.5% pari a 0.05, cioè ha una probabilità dell'8.5% di subire una perdita superiore al 5% del valore dell'opzione. E così via. Sarebbero maggiormente significativi livelli più bassi di VaR, nello specifico l'1% e lo 0.1%, che nel nostro caso porterebbero le curve ad essere molto più vicine all'asse delle ascisse. In questo modo i portafogli avrebbero l'1% o lo 0.1% di probabilità di ottenere delle perdite.

¹³² Compreso il caso di una strategia di replica statica.

¹³³ Ovvero i casi in cui la ricalibrazione del portafoglio avviene a seguito di variazioni del sottostante superiori a 0.1% e 0.2%.

¹³⁴ Il *Value at Risk* è una misura di *downside risk* in quanto tiene conto a livello simmetrico del lato delle perdite di una distribuzione di una variabile aleatoria. Preso in considerazione un intervallo di confidenza α , il VaR è quel quantile tale che la probabilità di ottenere perdite superiori a tale valore è pari ad α .

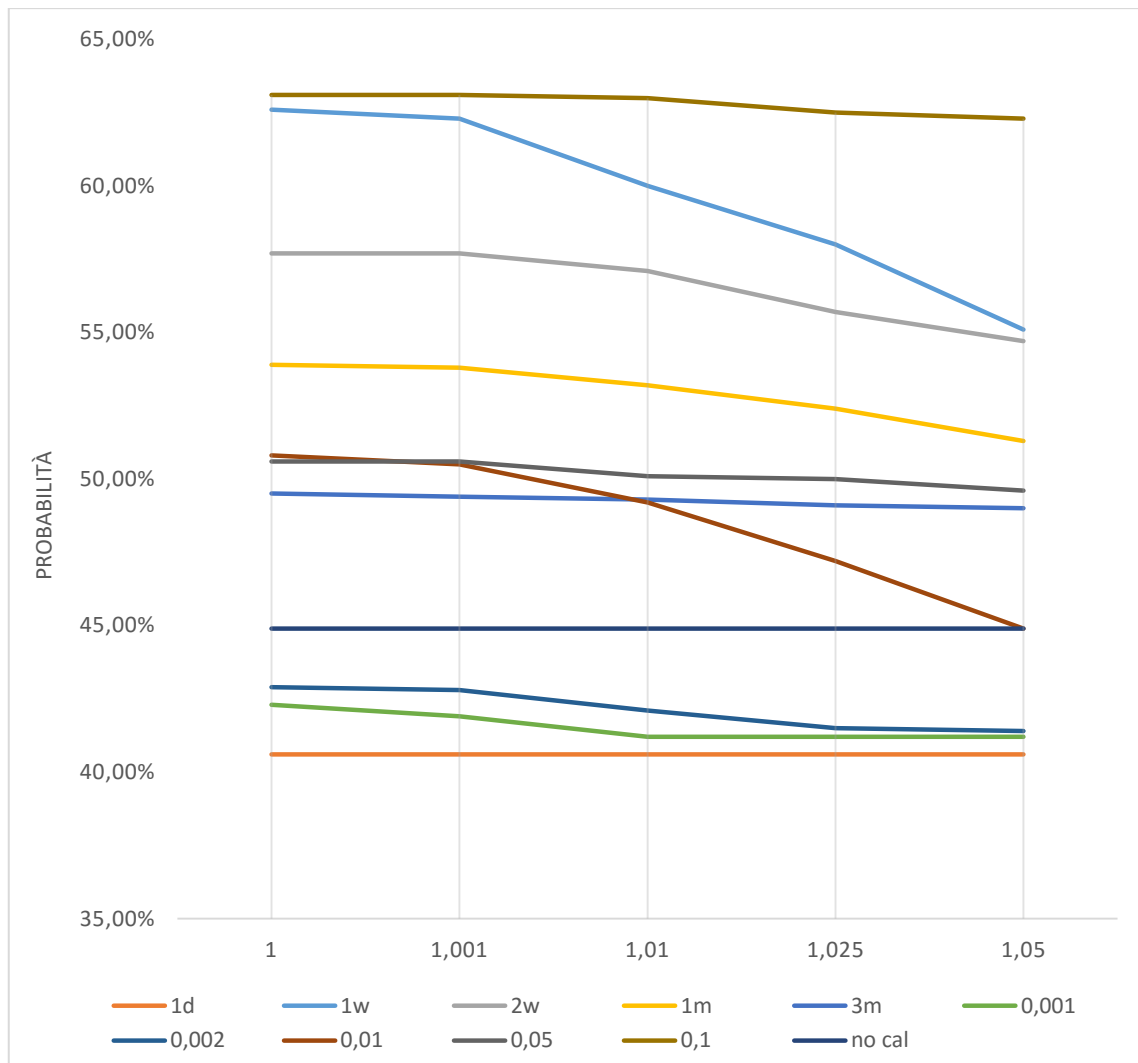


Figura 5. Confronto tra i vari portafogli

Il medesimo confronto può essere fatto considerando la probabilità che il portafoglio di replica possa assumere dei valori superiori al valore del *payoff* dell'opzione. Le percentuali considerate sono: 0%, 0,1%, 1%, 2,5%, 5%. I risultati ottenuti confermano quanto detto finora: anche in questo caso, infatti, la probabilità che il portafoglio abbia un valore a scadenza superiore al valore dell'opzione è maggiore nei casi in cui la replica è meno frequente, mentre una ricalibrazione più assidua permette di replicare l'opzione in modo più preciso. Tale principio vale indipendentemente sia nel caso del modello *Time based* che nel caso dell'*Asset Tolerance*.

Risultati del tutto simili, che non riportiamo, si ottengono considerando il caso dei portafogli che seguono l'approccio *Asset Tolerance* in abbinamento alla *hedging volatility*.

Successivamente la nostra attenzione si è spostata sulle distribuzioni dei risultati della somma degli *hedging errors* netti dei costi di transazione e capitalizzati fino a scadenza, per ogni singolo caso. Il primo portafoglio di replica si basa sull'approccio *Time based*. In questo caso abbiamo calcolato la *hedging volatility* secondo quanto indicato nel modello di Leland ed abbiamo ricalibrato il portafoglio ad intervalli di tempo discreti prestabiliti, quali: una volta al giorno (1d), una volta alla settimana (1w), una volta ogni due settimane (2w), una volta al mese (1m), una volta ogni tre mesi (3m).

Riportiamo di seguito i grafici dei risultati ottenuti:

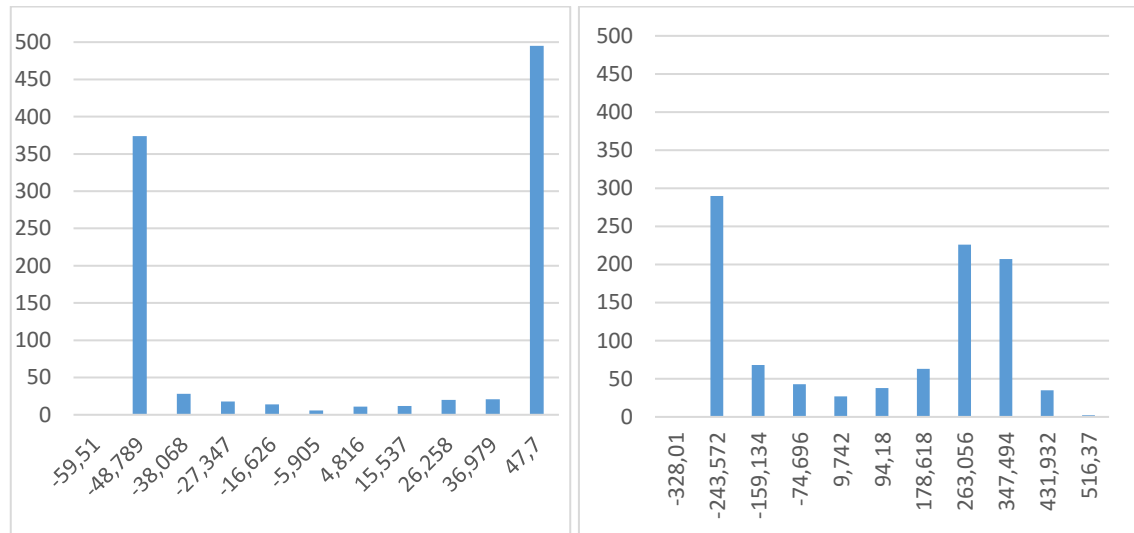


Figura 6. Ricalibrazione una volta al giorno e una volta alla settimana

Analizzando i risultati ottenuti dalle simulazioni si osserva che la media e lo scarto quadratico medio aumentano man mano che le ricalibrazioni del portafoglio diventano meno frequenti. In particolare vediamo che nel caso in cui la frequenza delle ricalibrazioni avviene ogni giorno, la distribuzione dei risultati ha una media che oscilla intorno allo zero. Vi è un'alta frequenza di valori molto positivi e molto negativi, mentre si ha una bassa frequenza per i valori intermedi intorno alla media.

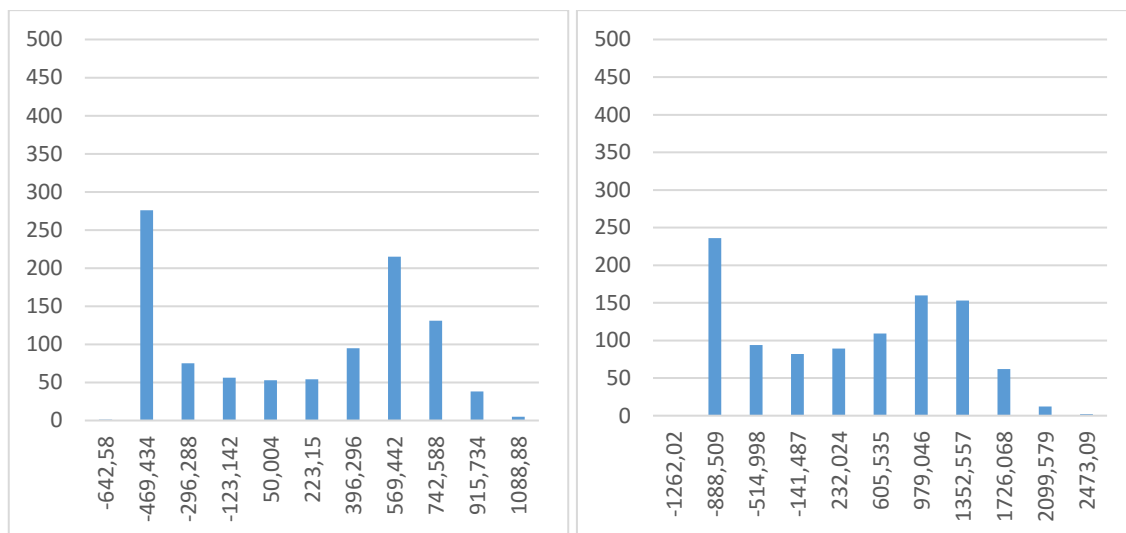


Figura 7. Ricalibrazione una volta ogni due settimane e una volta al mese

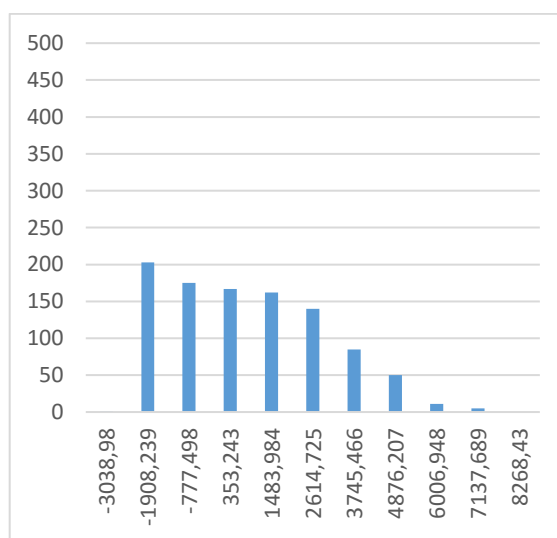


Figura 8. Ricalibrazione una volta ogni tre mesi

Man mano che il bilanciamento del portafoglio avviene meno di frequente, la media diventa positiva ed aumenta e lo scarto quadratico medio dei flussi a scadenza aumenta. La distribuzione dei risultati presenta un'asimmetria via via più definita man mano che il bilanciamento del portafoglio si fa meno frequente.

I risultati ottenuti sono in linea con quanto sostenuto da Leland nel proprio modello. Nei casi in cui la ricalibrazione è più frequente si ha una *adjusted volatility* più elevata che permette ai costi di transazione di compensare gli *hedging errors*. Comporta inoltre una diminuzione del *gamma* e quindi una minore sensibilità del *delta*: ciò riduce la varianza degli *hedging errors*, ovvero il rischio legato alla strategia di copertura. Bilanciamenti

meno frequenti implicano meno negoziazioni e conseguentemente meno costi di transazione, ma fanno sì che la somma degli *hedging errors* diventi via via maggiore. Si ha un maggior valore del gamma, quindi una più alta varianza degli *hedging errors*.

Il secondo portafoglio di replica si basa sull'approccio *move based*, qui nel caso particolare del modello *Asset Tolerance*. Abbiamo scelto proprio questo modello perché tra quelli che seguono l'approccio *move based* è il più semplice da adottare: si basa sulle variazioni del sottostante che sono facilmente osservabili sul mercato, non richiede calcoli complicati e quindi è facilmente fruibile anche da chi si avvicina per la prima volta ad una strategia dinamica di replica. Abbiamo fatto in modo che la ricalibrazione del portafoglio avvenisse solo nel caso in cui la variazione del sottostante tra un intervallo temporale e l'altro, che abbiamo assunto essere pari a un giorno, superi tali valori percentuali: 0.1%, 0.2%, 1%, 5%, 10%.

Riportiamo di seguito i grafici delle distribuzioni dei risultati della somma degli *hedging errors* netti dei costi di transazione e capitalizzati fino a scadenza, per ogni singolo caso:

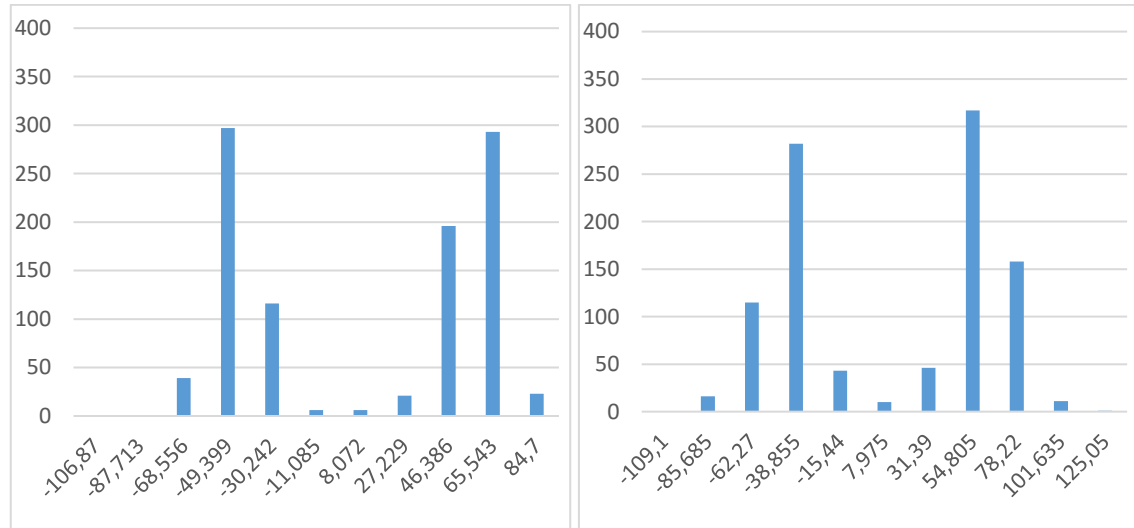


Figura 9. Variazione sottostante = 0,001 e variazione sottostante = 0,002

Si osserva che per percentuali molto basse del tasso di variazione del sottostante, ovvero per valori pari a 0.1% e 0.2%, la media oscilla intorno allo zero. La distribuzione dei risultati vede una maggiore concentrazione nei valori lontani dalla media, ovvero valori

molto positivi o molto negativi. In questi casi si osserva uno scarto quadratico medio contenuto.

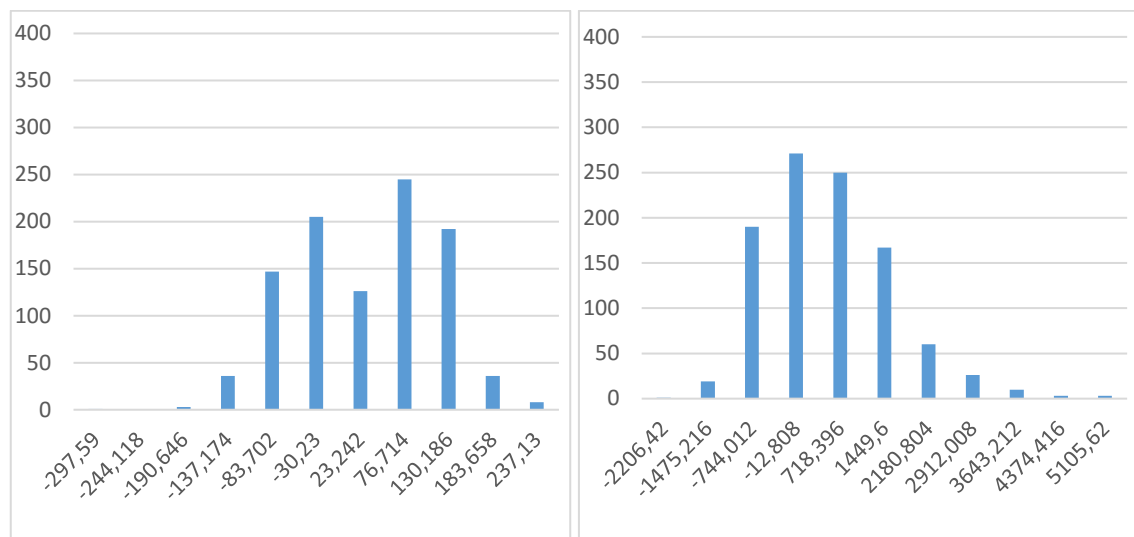


Figura 10. Variazione sottostante = 0,01 e variazione sottostante = 0,05

Nel caso di variazione pari all'1% si ha una media che si mantiene ancora intorno allo zero, ma si ha una maggiore volatilità, mentre nel caso di variazione pari al 5% la media è nettamente positiva. La distribuzione dei risultati delle simulazioni tende ad una forma a campana, ma si intuisce che ci troviamo di fronte ad una distribuzione asimmetrica, con una concentrazione maggiore per quanto riguarda i risultati negativi.

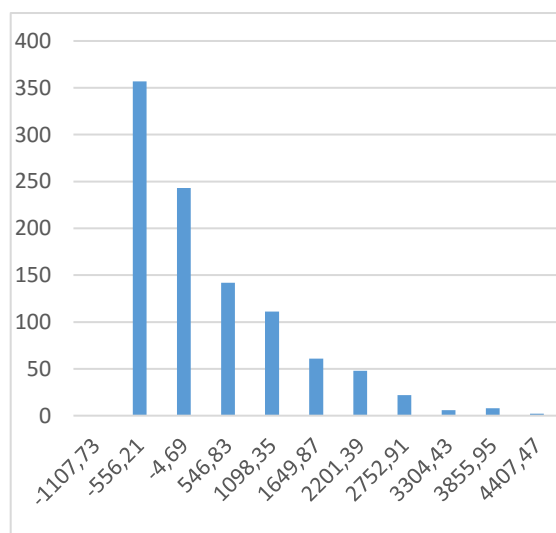


Figura 11. Variazione sottostante = 0,1

Nell'ultimo caso, si osserva una distribuzione nettamente asimmetrica, con una frequenza elevata di risultati negativi, ma con una media positiva ed elevata. La spiegazione è legata al fatto che l'aumento dell'ampiezza delle variazioni del sottostante va ad ampliare la cosiddetta *no transaction region*. Le ricalibrature del portafoglio, quindi, avvengono meno di frequente e di conseguenza i costi di transazione incidono meno sugli *hedging errors*. Lo scarto quadratico medio dei risultati ottenuti aumenta man mano che il tasso di variazione del sottostante aumenta perché sono necessarie delle fluttuazioni più ampie per attivare la ricalibrazione del portafoglio.

Il terzo portafoglio di replica si basa sul modello *Asset Tolerance* in combinazione con la *hedging volatility* secondo quanto stabilito da Leland. L'idea che abbiamo voluto sperimentare poggia sul fatto che Leland ipotizza di incorporare i costi di transazione nei movimenti di prezzo del sottostante, che implica un aumento della volatilità. In questo modo il premio relativo all'opzione sarà più elevato e ciò compensa i costi di transazione necessari per ricalibrare il portafoglio. La ricalibrazione segue l'approccio *move based* perché in questo modo non avviene ad intervalli di tempo prestabiliti senza tener conto del fatto che tale negoziazione sia ottimale o meno, ma avviene solo quando il sottostante ha delle oscillazioni che sono superiori alla percentuale impostata. In questo modo è possibile delineare una *no transaction region* in base alle proprie esigenze ed i costi di transazione vengono sostenuti solo quando necessario. Come nel caso precedente, le ricalibrature del portafoglio avvengono solo se la variazione del sottostante, tra un intervallo temporale e l'altro, supera un certo valore, quali: 0.1%, 0.2%, 1%, 5%, 10%.

Riportiamo di seguito i grafici delle distribuzioni dei risultati della somma degli *hedging errors* nettati dei costi di transazione e capitalizzati fino a scadenza, per ogni singolo caso:

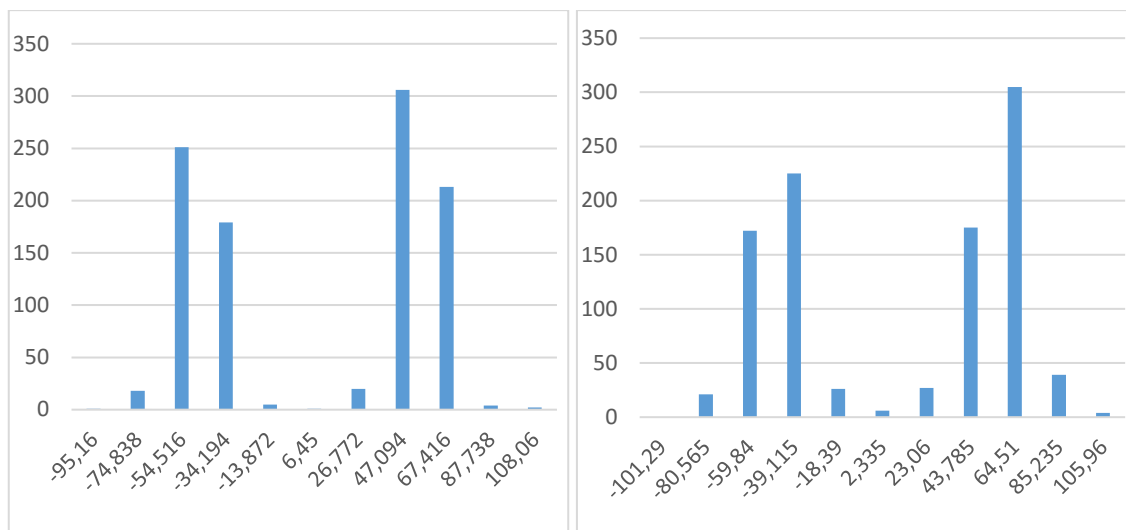


Figura 12. Variazione sottostante = 0,001 e variazione sottostante = 0,002

Anche in questo ultimo caso, come nel precedente, si osserva che per percentuali molto basse del tasso di variazione del sottostante, ovvero nei casi di 0.1% e 0.2%, i valori della media oscillano intorno allo zero. La distribuzione dei risultati vede una maggiore concentrazione nei risultati lontani dalla media, ovvero per valori molto positivi e molto negativi.

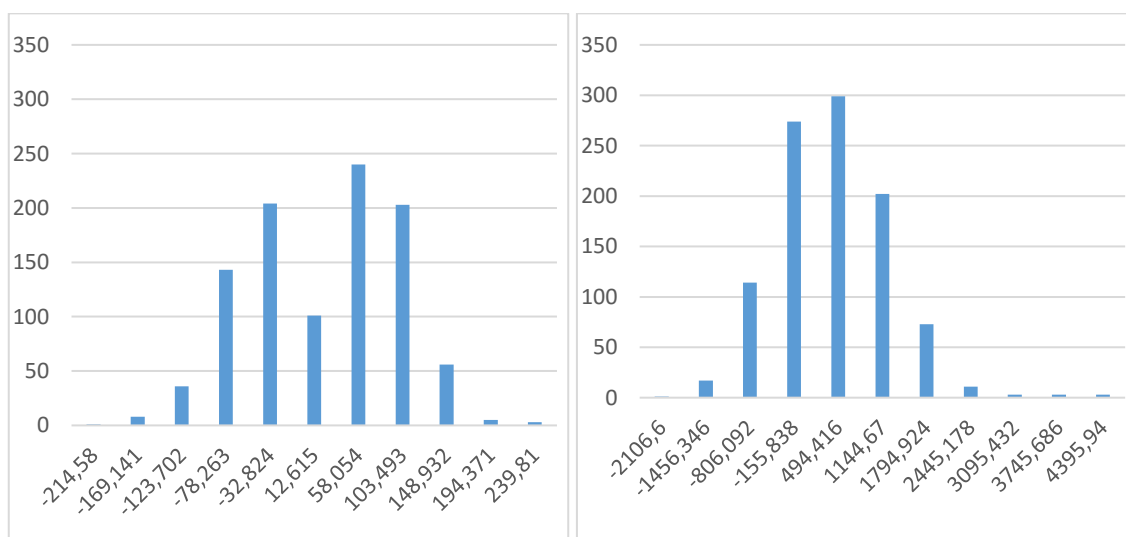


Figura 13. Variazione sottostante = 0,01 e variazione sottostante = 0,05

Nei caso di variazione pari all'1% si ha una media che si mantiene ancora intorno allo zero, ma con un maggiore scarto quadratico medio dei risultati, mentre nel caso di variazione del 5% la media dei risultati è nettamente positiva. Si ha una maggiore varianza

rispetto a quella ottenuta con tassi di variazione del sottostante più bassi. La distribuzione dei risultati delle simulazioni tendono ad essere quasi simmetriche, in particolare si osserva che passando da un tasso dell'1% al 5% si ha il passaggio da un'asimmetria negativa ad una asimmetria positiva¹³⁵.

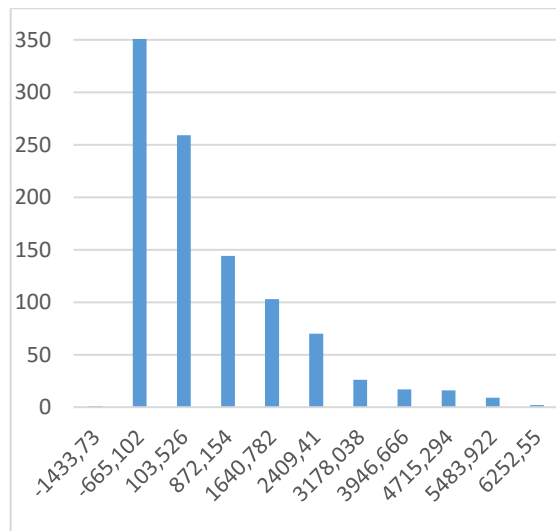


Figura 14. Variazione sottostante = 0,1

Nell'ultimo caso, si osserva una distribuzione nettamente asimmetrica, con una frequenza elevata di risultati negativi. Man mano che il tasso di variazione viene incrementato si osserva, inoltre, che la media dei flussi di cassa aumenta ed è sempre più positiva. La spiegazione, come detto nell'analisi del precedente portafoglio, è legata al fatto che aumento dell'ampiezza delle variazioni del sottostante va ad ampliare la *no transaction region*: le ricalibrazioni del portafoglio avvengono meno di frequente e di conseguenza i costi di transazione impattano meno sugli *hedging errors*. Lo scarto quadratico medio aumenta man mano che il tasso di variazione del sottostante aumenta. Il portafoglio così impostato non ha condotto a differenze significative rispetto ai precedenti portafogli, in particolare se confrontato con il portafoglio costruito secondo il modello *Asset Tolerance*.

L'ultimo confronto riguarda il portafoglio non ricalibrato, ovvero una strategia di replica statica. La finalità del confronto è dovuta al fatto che questa è spesso utilizzata come *benchmark* per le strategie dinamiche, le quali hanno come obiettivo la riallocazione del

¹³⁵ Si è calcolato l'indice di asimmetria.

portafoglio rispetto ai valori definiti inizialmente. La strategia di replica statica, invece, viene considerata una strategia *do nothing* in quanto non avviene alcuna variazione nella composizione del portafoglio rispetto all’allocazione iniziale. Il punto di forza di una strategia statica è il contenimento dei costi operativi e di gestione del portafoglio dovuto alla invarianza della composizione inizialmente definita, ma l’andamento del portafoglio è dipendente da quello dei titoli presenti nel portafoglio stesso. L’aspetto negativo di questa strategia è dovuto essenzialmente al fatto che in mercati molto volatili questa tecnica espone completamente il portafoglio all’andamento del mercato senza avere la possibilità di rettificare la composizione scelta per proteggersi o approfittare della situazione formatasi.

Riportiamo di seguito la distribuzione dei risultati della somma degli *hedging errors* nettati dei costi di transazione e capitalizzati fino a scadenza:

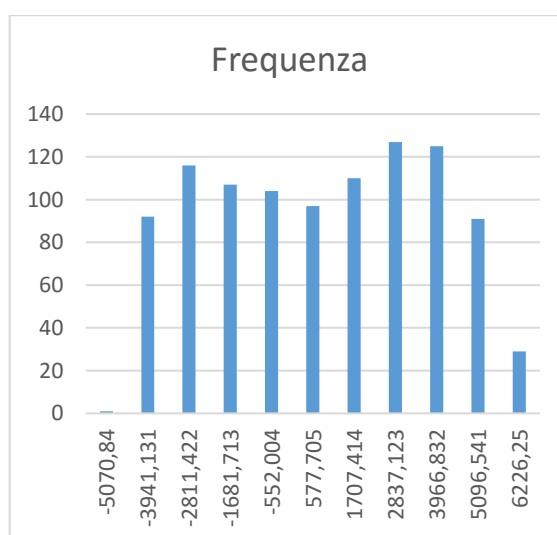


Figura 15. Portafoglio non ricalibrato

I flussi di cassa presentano una media positiva ed uno scarto quadratico medio molto elevato. La distribuzione dei risultati è lievemente asimmetrica, confermata dalla positività dell’indice di asimmetria.

Al fine di sintetizzare l’analisi delle distribuzioni di cui sopra, abbiamo messo a confronto la media dei risultati ottenuti dei singoli portafogli. Per una consultazione più dettagliata riportiamo i dati raccolti nel grafico e nella tabella seguenti:

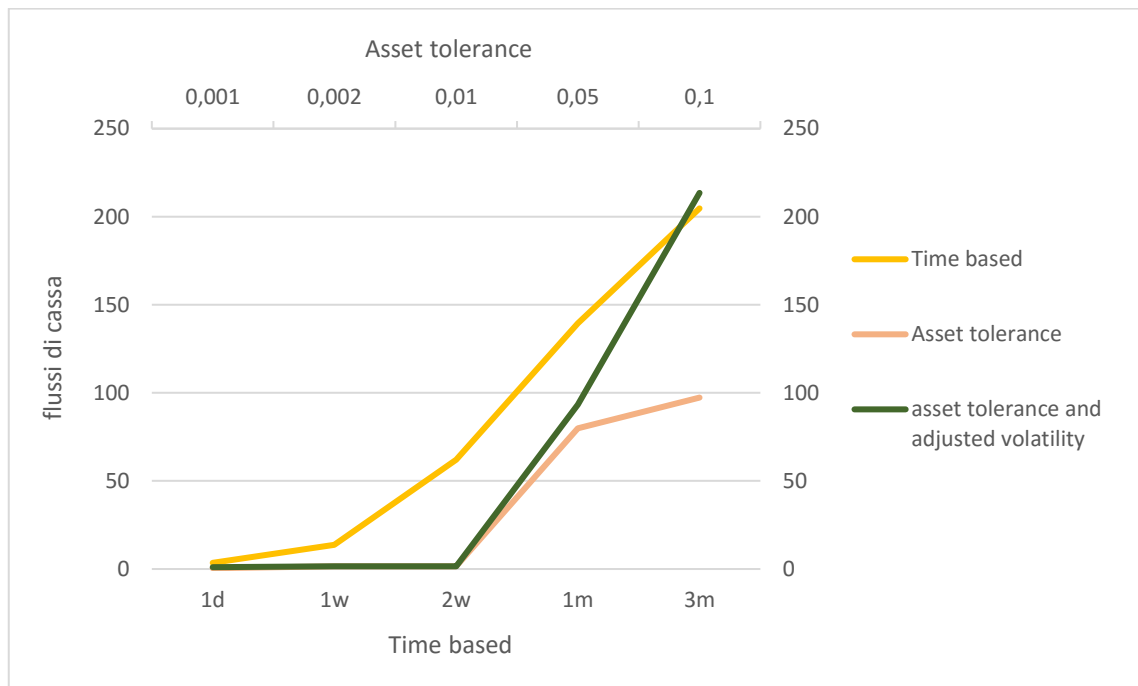


Figura 16. Valori medi della somma degli hedging errors, al netto dei costi di transazione, capitalizzati fino a scadenza

	Time based					Asset Tolerance					Asset tolerance and Adjusted Volatility				
media	3,50	13,80	62,01	139, 5	204,73	0,44	1,48	1,53	79,83	97,31	1,04	1,58	1,63	93,37	213,53
sqm	49,22	256,43	499,25	927,56	2153,68	52,14	54,64	84,42	1010,37	1166,69	52,01	54,41	77,2	824,71	1404,84

I risultati ottenuti nel caso del *Time based* sono sempre superiori ai valori ottenuti nel caso *Asset Tolerance*. In particolare in quest'ultimo caso la media si mantiene intorno allo zero fino al caso in cui la ricalibrazione avviene ad un variazione del 1% del sottostante, per poi crescere nettamente nei casi successivi. La spiegazione dei risultati ottenuti è riconducibile ai costi di transazione generati dalla negoziazione delle quote dei titoli in portafoglio, che riportiamo nel seguente grafico:

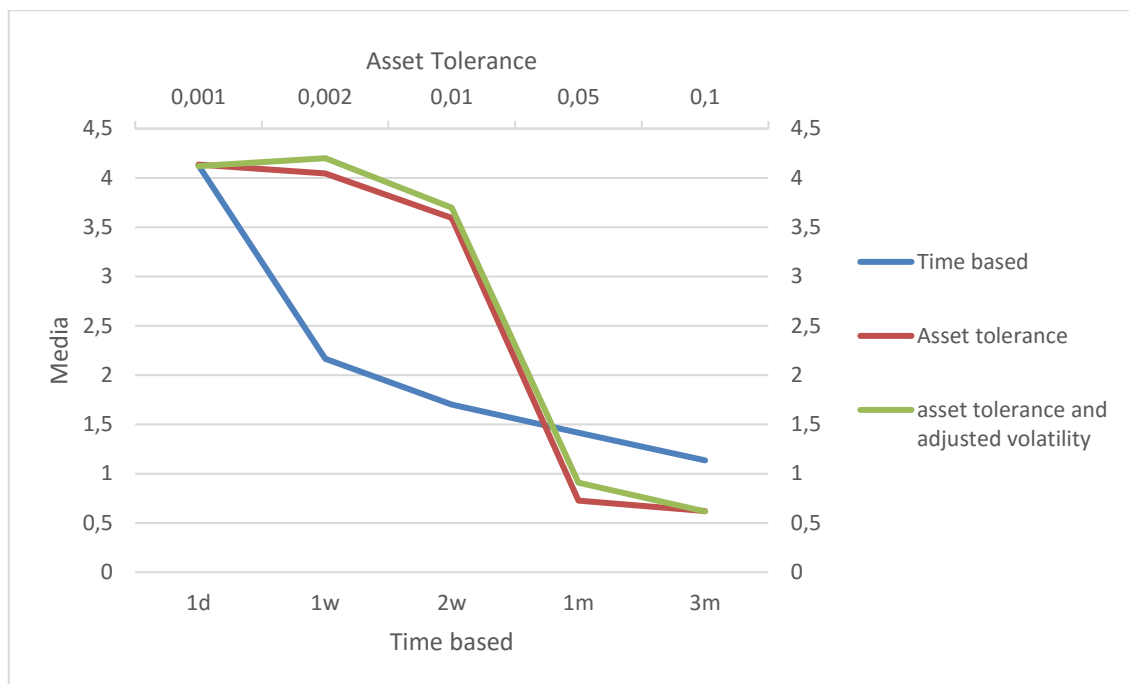
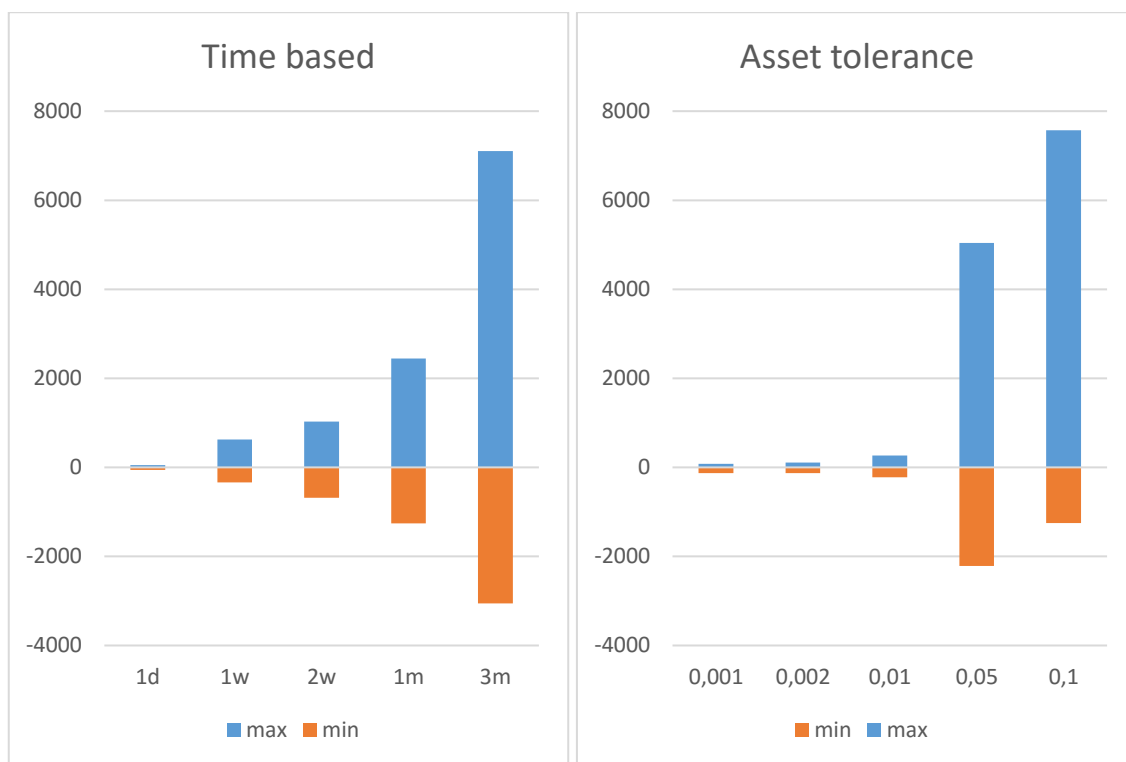


Figura 17. Valori medi dei costi di transazione

Il grafico precedente mette a confronto la media della somma dei costi di transazione per ogni singolo portafoglio. Ciò che osserviamo è che il modello *Time based* presenta, generalmente, minori costi di transazione rispetto al modello *move based*. Il risultato ottenuto è compatibile con i dati che abbiamo utilizzato nelle nostre simulazioni: la volatilità da noi ipotizzata è elevata e ciò implica maggiori fluttuazioni del sottostante che quindi nel caso *move based* attivano quasi sempre¹³⁶ la ricalibrazione del portafoglio, con conseguenti costi di transazione elevati. Il modello *Time based* invece non è influenzato dalla volatilità del sottostante per quanto riguarda la frequenza di ricalibrazione del portafoglio: la negoziazione dei titoli avviene a intervalli di tempo regolari senza tener conto del fatto che tale ricalibrazione sia ottimale o meno. Inoltre si conferma il principio generale che sta alla base della replica delle opzioni in presenza di costi di transazione, ovvero che un'alta frequenza di ricalibrazione del portafoglio comporta elevati costi di transazione. Questi infatti tendono a decrescere, in entrambi i modelli, man mano che la ricalibrazione diviene meno frequente, andando di conseguenza ad impattare meno sugli errori di copertura che si generano.

¹³⁶ Specie nei casi in cui il *trigger event* è legato ad una variazione percentuale del sottostante pari a 0.1%, 0.2% e 1%.

Successivamente ci siamo soffermati sui valori minimi e massimi dei risultati ottenuti a scadenza, per ogni singolo portafoglio:



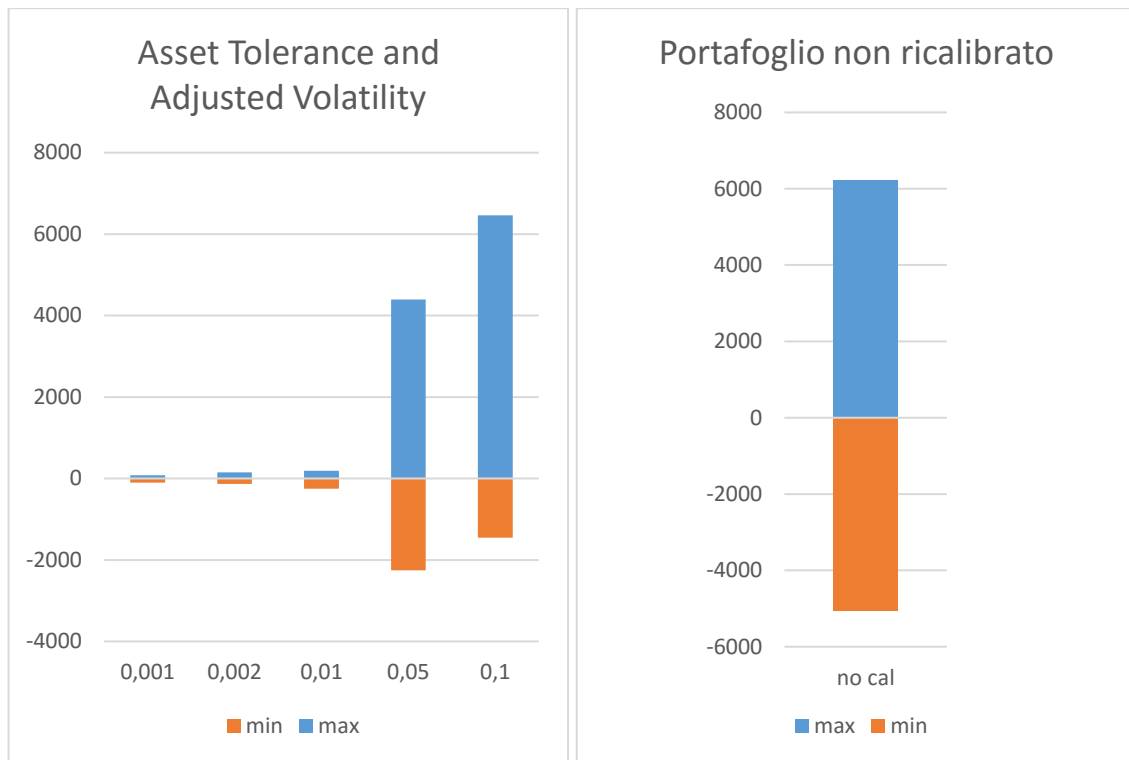


Figura 18. Valori minimi e massimi della somma degli hedging errors, al netto dei costi di transazione, capitalizzati fino a scadenza

Si osserva che i valori minimi e massimi aumentano in maniera considerevole al diminuire della frequenza di ricalibrazione dei portafogli di replica, mentre nei casi di maggior frequenza di bilanciamento i valori minimi e massimi dei flussi di cassa tendono a zero. Inoltre, mentre nel modello *Time based* si osserva un incremento graduale dei valori minimi e massimi, nel modello *Asset Tolerance* e nel caso del portafoglio calibrato secondo l'*Asset Tolerance and adjusted volatility* si nota invece una notevole differenza tra il caso di ricalibratura ad ogni variazione del sottostante pari all'1% e il caso in cui il *trigger event* avvenga ad una variazione del 5%: vi è infatti un netto distacco con un considerevole aumento dei valori osservati.

Al fine di normalizzare i risultati, per epurarli da eventuali valori anomali, abbiamo preso in considerazione le ultime dieci osservazioni dei risultati ottenuti:

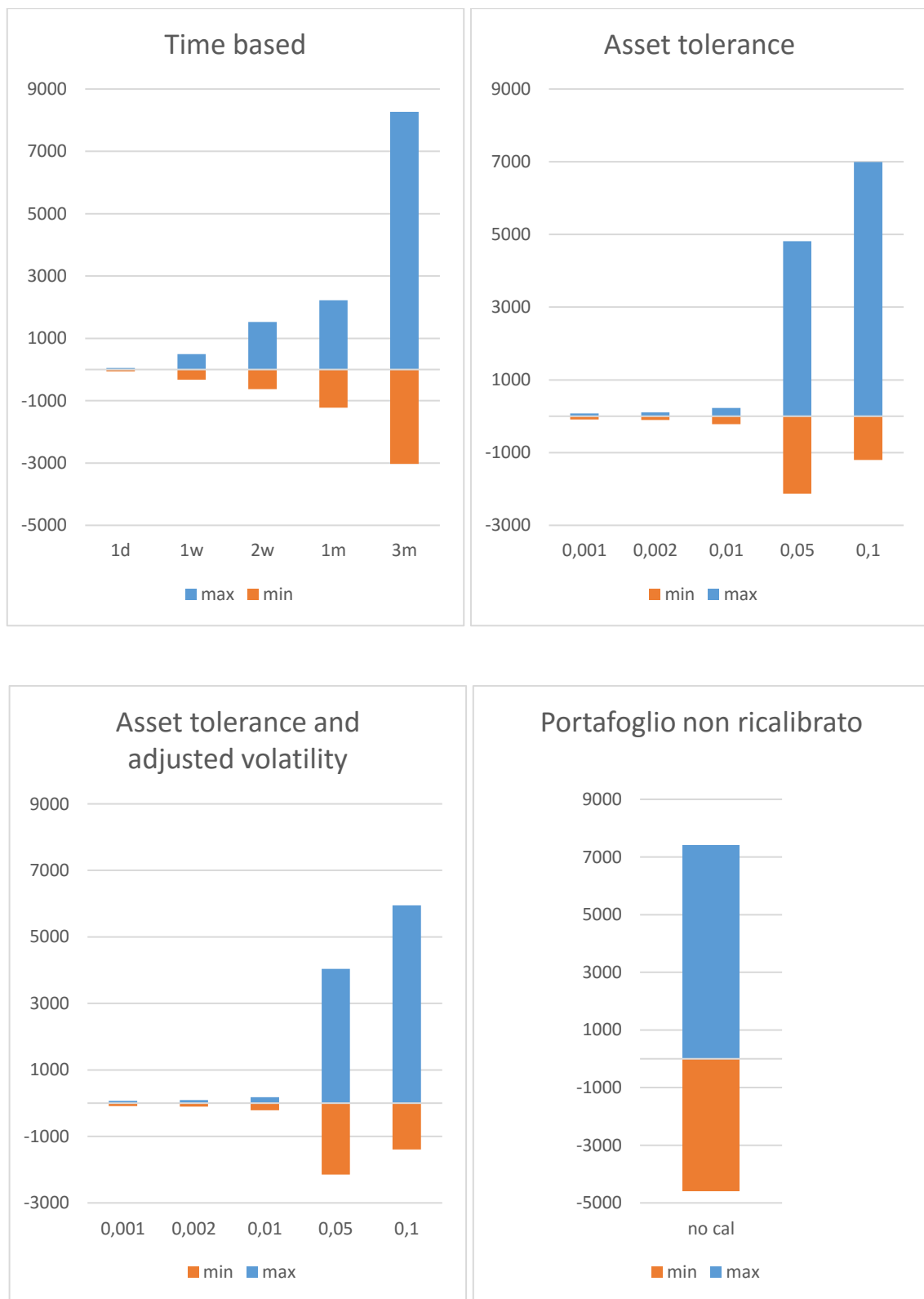


Figura 19. Valori minimi e massimi delle ultime 10 osservazioni della somma degli hedging errors, al netto dei costi di transazione, capitalizzati fino a scadenza

Quello che notiamo dai grafici sottostanti è che i valori rimangono sostanzialmente invariati rispetto ai risultati precedentemente analizzati, confermando quanto già detto.

Occorre, però, tener presente anche le probabilità con le quali, a scadenza, la somma degli *hedging errors* netti dei costi di transazione siano positivi o negativi. Per una facile consultazione riportiamo di seguito i grafici delle percentuali ottenute:



Figura 20. Probabilità che i risultati a scadenza siano positivi

Time based						Asset Tolerance						Asset tolerance and Adjusted Volatility					
p >0	59,40%	53,00%	55,10%	54,60%	49,20%		58,60%	58,70%	53,80%	52,10%	40,60%		54,30%	54,80%	51,80%	53,20%	44,00%
p <0	40,60%	47,00%	44,90%	45,40%	50,80%		41,40%	41,30%	46,20%	47,90%	59,40%		45,70%	45,20%	48,20%	46,80%	56,00%

Si osserva dalla tabella sopra riportata che i singoli risultati ottenuti a scadenza hanno una probabilità che va dal 60% al 50% circa nel caso del *Time based*, tra il 60% e il 40% circa nel caso dell'*Asset Tolerance*, e tra il 55% e il 45% circa nel caso di *Asset Tolerance and adjusted volatility* di essere positivi. Le percentuali tendono a diminuire man mano che la ricalibrazione del portafoglio si fa meno frequente. Ciò implica che ci sono buone probabilità che il valore della somma degli *hedging errors* nettati dei costi di transazione, capitalizzati fino a scadenza, possa essere negativo, in particolar modo nei casi in cui la ricalibratura è meno frequente, e che quindi a scadenza l'investitore debba provvedere a far fronte a flussi di cassa negativi.

Non abbiamo riportato nei grafici precedenti il caso del portafoglio non ricalibrato perché l'output sarebbe stato un punto, ma la media dei flussi di cassa a scadenza è pari a 273.6, con una probabilità del 53,80% di ottenere dei risultati positivi. Osservando dunque i grafici riportati nella Figura 4 e nella Figura 5, si deduce che il portafoglio non permette di replicare con accuratezza il valore dell'opzione e, alla luce dei dati sopra riportati, i flussi di cassa a scadenza hanno circa il 50% di essere positivi, il che è dovuto alla completa esposizione del portafoglio di replica all'andamento del mercato sottostante.

4.1 Conclusioni

A conclusione di questo lavoro, si intuisce che nessuna strategia replica perfettamente il valore dell'opzione. Come più volte sostenuto, una ricalibrazione molto frequente permette di replicare con maggiore precisione il valore dell'opzione, ma non permetterà comunque di azzerare gli *hedging errors*, se non nel caso in cui l'ampiezza degli intervalli di revisione tenda a zero. La replica sarà soggetta ai costi di transazione, che saranno più elevanti all'aumentare della frequenza delle negoziazioni. Ogni investitore, quindi, dovrà adottare la strategia di replica ottimale in relazione non solo ai propri obiettivi, ma anche alla sua avversione e capacità di sopportare il rischio.

I modelli di replica come il *Variable Bandwidth Delta* e la *Utility based approach* hanno quel grado di complessità tale da permettere di ottenere risultati migliori rispetto alle altre strategie di replica, ma a discapito di una minore praticità e facilità di implementazione ed utilizzo, e della necessità di tempo ed idonee strutture informatiche. E' chiaro che gli investitori istituzionali, come ad esempio gli *hedge funds*, siano i principali fruitori di tali metodologie in quanto hanno le risorse (finanziarie, tecnologiche ed umane) per adottarle e la capacità di sopportare meglio i rischi, permettendosi di unire più derivati per ottenere un maggior profitto.

Società più piccole e investitori *retail* che hanno solo lo scopo di ridurre la propria esposizione al rischio, si affidano a delle strategie più semplici come i modelli che abbiamo considerato in questa lavoro. Il *Time based* e l'*Asset Tolerance* si basano su principi di replica differenti: il primo impone di ribilanciare il portafoglio a determinati intervalli di tempo prestabiliti senza tener conto del fatto che la negoziazione sia ottimale; il secondo si basa sull'ampiezza della variazione di prezzo del sottostante, che permette di tenere in considerazione il livello di rischio dell'investitore. Entrambe le strategie sono facilmente applicabili e l'unica difficoltà sta nel definire l'intervallo di replica, nel modello *Time based*, o la variazione percentuale del sottostante che attiva la ricalibrazione del portafoglio, nel modello *Asset Tolerance*, in base al livello di avversione al rischio dell'investitore, a fronte di risultati in linea con la propria capacità di sopportazione del rischio.

Nonostante le differenze di base tra *Time based* e *Asset Tolerance* porterebbero ad ipotizzare risultati differenti, i due modelli hanno dato prova di riuscire a replicare con una buona approssimazione il valore dell'opzione nel caso di una ricalibratura molto frequente del portafoglio, conducendo inoltre a risultati abbastanza simili. Ciò è dovuto anche al fatto che l'*adjusted volatility*, computata secondo i valori delle variabili (quali media, varianza e intervallo temporale) da noi scelti, assume nei vari portafogli dei valori che non si discostano significativamente dalla volatilità del sottostante. Analogamente in entrambi i modelli, un ribilanciamento più sporadico comporta una perdita di efficacia della copertura, esponendo gli investitori al rischio di realizzare dei flussi di cassa decisamente negativi a cui far fronte alla scadenza dell'opzione.

Il portafoglio che abbiamo creato dalla combinazione dell'*Asset Tolerance* con l'*adjusted volatility* così come proposta da Leland non ha portato a differenze significative rispetto agli altri portafogli, in particolare rispetto al caso dell'*Asset Tolerance*, e oltre alle problematiche sollevate nel calcolo della *adjusted volatility*, non ha dato alcun valore aggiuntivo alla nostra analisi.

Il portafoglio non ricalibrato ha generato, come prevedibile, dei risultati non compatibili con una strategia di replica efficace nel contesto simulato. Si conferma quindi che in un mercato meno turbolento, caratterizzato da una volatilità del sottostante più contenuta, tale strategia di replica avrebbe condotto a risultati migliori.

In questa tesi abbiamo voluto semplicemente mettere a confronto due diverse strategie di replica delle opzioni in condizioni concretamente verificabili sui mercati finanziari. La portata del nostro lavoro è stata, per tanto, limitata e ha ricoperto solo una parte del vasto campo del *hedging*, senza prendere in considerazione strategie di replica e derivati particolarmente complicati. Ciononostante, siamo riusciti ad apprezzare, attraverso i risultati ottenuti, la possibilità di poter facilmente implementare delle strategie di replica basate su ipotesi realistiche alternative al modello di Black-Scholes, anche se ad oggi quest'ultimo rimane il modello più utilizzato dagli investitori.

Un'analisi condotta mediante l'utilizzo di dati reali avrebbe condotto a risultati ancora più significativi ed eloquenti.

Per di più, nella nostra analisi abbiamo assunto un valore costante della volatilità, però, come precedentemente detto, la volatilità non è costante, ma è soggetta alle aspettative circa l'ampiezza e la frequenza delle future fluttuazioni del prezzo del titolo sottostante. Per tanto uno sviluppo successivo potrebbe essere quello di implementare, di volta in volta, la volatilità implicita nel calcolo del valore del portafoglio di replica, fino alla scadenza dell'opzione.

Considerazioni analoghe possono essere fatte per quanto riguarda il tasso privo di rischio. Si potrebbe considerare pari a quello di un titolo non rischioso, ad esempio un Titolo di Stato, che ha la stessa scadenza dell'opzione.

Inoltre in questa tesi abbiamo preso per buona un'altra assunzione invece criticabile, cioè l'ipotesi di un'evoluzione non discontinua dell'andamento del sottostante. Nella realtà tale assunzione non è sempre verificata. I prezzi possono presentare dei *gap* spesso legati ad eventi estremi. Tale discontinuità potrebbe essere rappresentata da un *processo di Poisson composto*¹³⁷. Il modello *Time based* sarebbe agevolato nella strategia di replica perché, prendendo ad esempio le Banche Centrali, generalmente gli interventi avvengono a mercati chiusi e quindi i salti si verificano tra la chiusura e l'apertura del successivo giorno di negoziazione. In questo caso il ribilanciamento giornaliero permetterebbe di tenerne conto.

Infine, la recente crisi finanziaria ha messo in discussione l'ipotesi di log-normalità: le distribuzioni hanno manifestato una maggiore asimmetria e code più spesse.¹³⁸ Sarebbe interessante quindi confrontare i risultati delle strategie di replica ottenuti in condizioni normali con i risultati delle strategie di replica riscontrati in condizioni di *stress*, che tengano conto delle peculiarità della distribuzione del sottostante, al fine di individuare quale sia la strategia di replica più idonea.

¹³⁷ E' un processo aleatorio in tempo continuo che compie dei salti, la cui legge è associata a un processo di Poisson la cui lunghezza è determinata da una certa distribuzione scelta in precedenza.

¹³⁸ (Luoma, 2010)

BIBLIOGRAFIA

- Airoldi, M. (2009, Novembre). *Elementi di Finanza, metodi numerici e loro implementazione*.
- Alexander, C. (2009). *Pricing, Hedging and Trading Financial Instruments*. John Wiley & Sons Ltd.
- Banfi, A. (2013). *I mercati e gli strumenti finanziari*.
- Barontini. Financial Risk Management.
- Borsa Italiana. *IDEM - Il mercato italiano dei derivati*.
- Borsa Italiana. *Cost of Carry*.
- Borsa Italiana. *Swap*.
- Borsa Italiana. *Future Finanziario*.
- Borsa Italiana. *Covered Warrant e Leverage Certificate*.
- Borsa Italiana. *ETF*.
- Borsa Italiana. *Mercato Regolamentato*.
- Borsa Italiana. *Il Mercato Italiano dei Derivati: un'opportunità ad alto potenziale*.
- Borsa Italiana. *Delta Neutral*.
- Borsa Italiana. *Mercato Over the Counter*.

Borsa Italiana. *Istituzioni del Sistema Finanziario*.

Borsa Italiana. *Controvalore Nozionale*.

Borsa Italiana. *Guida alle opzioni. Aspetti teorici*.

Borsa Italiana. MIBO - Opzioni su FTSE MIB.

Borsa Italiana. Stock Option.

Cartei, Quirici, Bellandi, & Lazzeretti. (2010). *Il mercato mobiliare. Strategie e tecniche di negoziazione dei prodotti finanziari*.

Cherubini U., D. L. (2001). *Il Rischio Finanziario*. Milano: McGraw-Hill Italia.

Consob. *La bolla dei tulipani*.

Consob. *Uso dei derivati finanziari*.

Consob. *La leva finanziaria*.

Consob. (2012, Ottobre). *I principali prodotti derivati. Elementi informativi di base*.

Decreto Legislativo 24 febbraio 1998, n. 58.

Gramatica, P. (2002). *Economia e tecnica degli scambi internazionali*.

Hull, J. C. (2008). *Risk management e istituzioni finanziarie*. Pearson.

Hull, J. C. (2009). *Opzioni, Futures e Altri Derivati*. Pearson.

James H. Stock, M. W. (2005). *Introduzione all'econometria*. Pearson.

- Leland, H. E. (1985, December). Option Pricing and Replication with Transaction Costs. *The Journal of Finance*, Vol. 40, No. 5, 1283-1301.
- Luoma, S. (2010). *Option Hedging with Transaction Costs*.
- Maienza, G. (2007). *Option Pricing con il modello di Heston*.
- Minenna, M. *Volatilità implicita, Covered Warrant e scelta degli investitori*.
- Mininni, R. M. (2014). *Il Processo Stocastico Martingala e sue Applicazioni in Finanza*.
- Moriconi, F. (2008, Novembre 12). *Il calore nella Finanza*. Perugia.
- Nielsen, L. T. (1992, October). *Understanding $N(d1)$ and $N(d2)$: Risk-Adjusted Probabilities in the Black-Scholes Model*.
- Phelim P. Boyle, D. E. (1980). Discretely adjusted option hedges. *Journal of Finance*, 259-282.
- Ramponi, Fabretti. *Modelli matematici per la valutazione dei derivati: dalla formula CRR alla formula di Black-Scholes*.
- Shah, A. (1997, October). *Black, Merton and Scholes: Their work and its consequences*.
- Toft, K. B. (1994, July). *Exact Formulas for the Expected Hedging Error and Transaction Costs in Option Replication*.
- Treccani. (2012). *Dizionario di Economia e Finanza*.
- www.theblog.it/economia. *La replicazione dei titoli derivati*.
- Yonggan Zhao, W. T. (2003, July 26). On Leland's Option Hedging Strategy with Transaction Costs.

Yuri M. Kabanov, M. M. (1997). On Leland's strategy of option pricing with transactions costs. *Finance Stochast*, p. 239–250.

Zakamouline, V. I. (2006, January 17). Optimal Hedging of Option Portfolios with Transaction Costs.

Zanchetta, S. (2012, Ottobre). *Volatilità e skew: indicazioni di sentiment*. Borsa Italiana.

INDICE DELLE FIGURE

<i>Figura 1. Evoluzione del sottostante con $\sigma = 0,1$</i>	73
<i>Figura 2. Evoluzione del sottostante con $\sigma = 0,2$</i>	74
<i>Figura 3. Evoluzione del sottostante con $\sigma = 0,3$</i>	74
<i>Figura 4. Confronto tra i vari portafogli</i>	80
<i>Figura 5. Confronto tra i vari portafogli</i>	82
<i>Figura 6. Ricalibrazione una volta al giorno e una volta alla settimana</i>	83
<i>Figura 7. Ricalibrazione una volta ogni due settimane e una volta al mese</i>	84
<i>Figura 8. Ricalibrazione una volta ogni tre mesi</i>	84
<i>Figura 9. Variazione sottostante = 0,001 e variazione sottostante = 0,002</i>	85
<i>Figura 10. Variazione sottostante = 0,01 e variazione sottostante = 0,05</i>	86
<i>Figura 11. Variazione sottostante = 0,1</i>	86
<i>Figura 12. Variazione sottostante = 0,001 e variazione sottostante = 0,002</i>	88
<i>Figura 13. Variazione sottostante = 0,01 e variazione sottostante = 0,05</i>	88
<i>Figura 14. Variazione sottostante = 0,1</i>	89
<i>Figura 15. Portafoglio non ricalibrato</i>	90
<i>Figura 16. Valori medi della somma degli hedging errors, al netto dei costi di transazione, capitalizzati fino a scadenza</i>	91
<i>Figura 17. Valori medi dei costi di transazione</i>	92
<i>Figura 18. Valori minimi e massimi della somma degli hedging errors, al netto dei costi di transazione, capitalizzati fino a scadenza</i>	94
<i>Figura 19. Valori minimi e massimi delle ultime 10 osservazioni della somma degli hedging errors, al netto dei costi di transazione, capitalizzati fino a scadenza</i>	95
<i>Figura 20. Probabilità che i risultati a scadenza siano positivi</i>	96